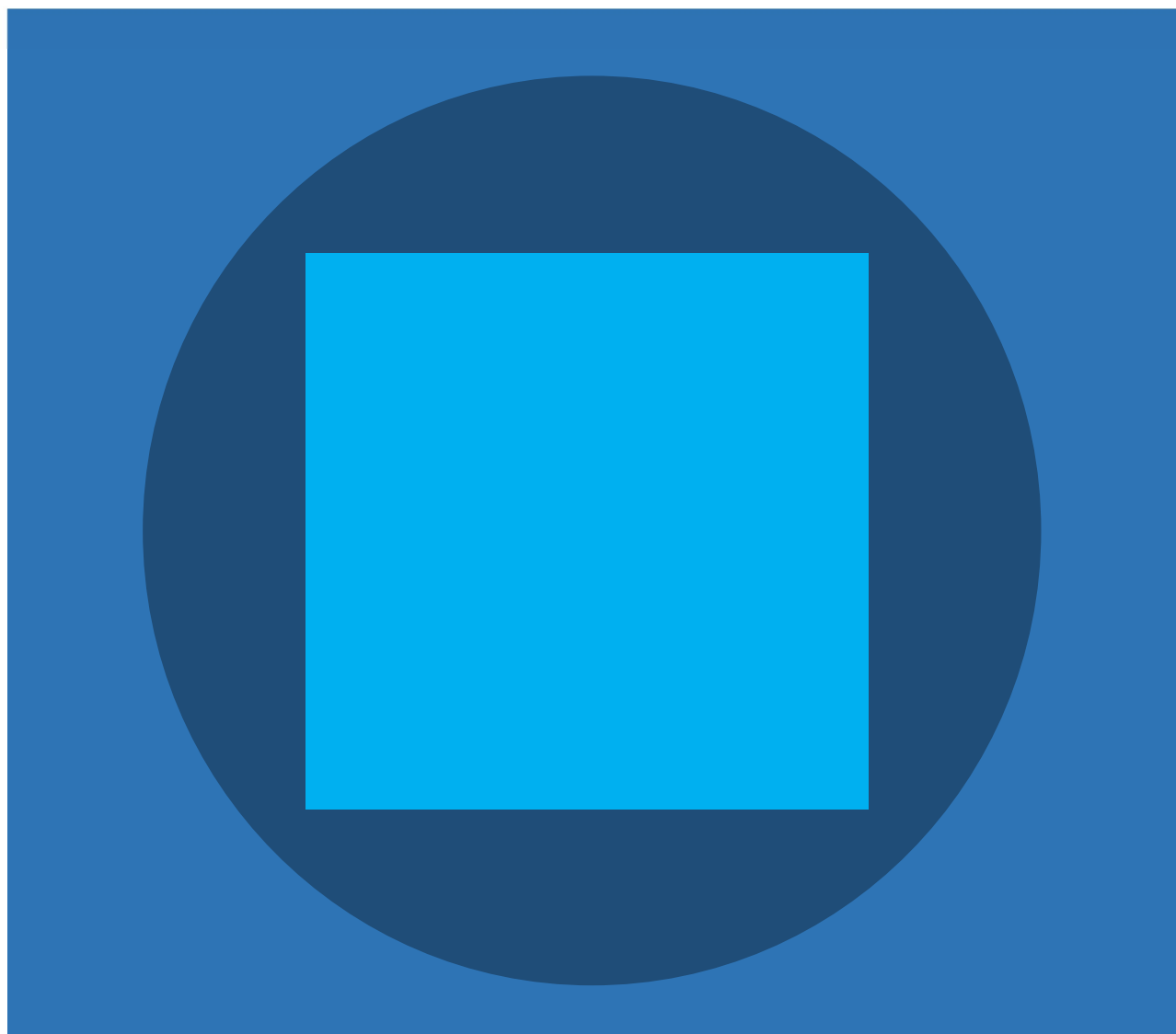


ทอพอโลยีเบื้องต้น

Introductory Topology

โดย ผศ.ดร.กันย์ สุนย์ชัน

ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์



ทอพอโลยีเบื้องต้น

ผู้แต่ง : กันย์ สุนัยชัน

จัดทำโดย : กันย์ สุนัยชัน

พิมพ์ครั้งที่ 1 : พฤษภาคม 2565

ISBN (e-book) : 978-616-590-729-3

สงวนลิขสิทธิ์

คำนำ

ในทางคณิตศาสตร์ วิชาทอพอโลยี เป็นวิชาที่ว่าด้วยการศึกษาสมบัติทางเรขาคณิตของวัตถุ ซึ่งสามารถถูกรักษาภายใต้การเปลี่ยนรูปร่างอย่างต่อเนื่อง (continuous deformation) ตัวอย่างเช่น การยืด การหด การบิดตัว การงอ แต่การเปลี่ยนรูปซึ่งเป็นสาเหตุให้เกิดการฉีกขาด หรือเกิดการนำวัตถุมาตัดปะกัน ไม่ถือว่าเป็นการเปลี่ยนรูปร่างอย่างต่อเนื่อง ดังนั้นจึงไม่แปลกที่นักทอพอโลยีจะมองวัตถุว่าเป็นยางที่สามารถยืดหยุ่นเปลี่ยนรูปได้ ดังที่มีคำกล่าวว่า นักทอพอโลยีมองแก้วกาแฟกับโดนัทเป็นสิ่งเดียวกัน



ที่มา : <https://cems.riken.jp/en/laboratory/qmtrt>

ปริภูมิทอพอโลยี คือ เซตที่มีการนิยามโครงสร้างซึ่งเรียกว่า ทอพอโลยี จากนิยามดังกล่าวทำให้เราสามารถพูดถึงการเปลี่ยนรูปร่างอย่างต่อเนื่องบนปริภูมิได้ โดยการเปลี่ยนรูปที่ศึกษาในวิชาทอพอโลยีนี้นั้นมีอยู่ด้วยกันหลักๆอยู่สองแบบ แบบแรกเรียกว่า การส่งแบบสมานสัณฐาน (homeomorphism) และแบบที่สองเรียกว่า การส่งแบบฮอโมโทปี (homotopies) ตัวอย่างสมบัติทางเรขาคณิตที่ถูกรักษาภายใต้การส่งดังกล่าวเช่น

- ความกะชับ (compactness) ซึ่งทำให้เราเห็นความแตกต่างระหว่าง เส้นตรง กับ วงกลม
- ความเชื่อมโยง (connectedness) ซึ่งทำให้เราเห็นความแตกต่างระหว่างวงกลม 1 วง กับวงกลม 2 วงที่ไม่ทับซ้อนกัน

วิชาทอพอโลยีเป็นวิชาที่ถูกคิดค้นมาในศตวรรษที่ 90 ซึ่งถือว่าเป็นศาสตร์ยุคใหม่ ถ้าเทียบกับสาขาวิชาอื่นๆทางคณิตศาสตร์ เช่น พีชคณิต หรือ ทฤษฎีจำนวน วิชาทอพอโลยีสามารถนำไปประยุกต์ใช้ให้เกิดประโยชน์ต่างๆได้มากมาย ตัวอย่างเช่น การศึกษาโครงสร้างโมเลกุลของ DNA ผ่านทฤษฎีเงื่อนปม (Knot theory) การศึกษาโครงสร้างข้อมูลขนาดใหญ่ (Big data) ผ่านการวิเคราะห์ข้อมูลเชิงทอพอโลยี (Topological data analysis) การศึกษาทฤษฎีควอนตัมในฟิสิกส์ผ่านมุมมองทฤษฎีสนามควอนตัมทอพอโลยี (Topological quantum field theory)

หนังสือเล่มนี้มีการจัดเรียงเนื้อหาดังนี้ ผู้เขียนเริ่มด้วยการทบทวนความรู้พื้นฐานเพื่อนำเข้าสู่บทเรียน จากนั้นใน บทที่ 1 กล่าวถึงปริภูมิอิงระยะทางซึ่งเป็นการขยายการวัดระยะทางบนเซตของจำนวนจริง บทที่ 2 กล่าวถึงปริภูมิทอพอโลยีซึ่งเป็นปริภูมิที่ถูกขยายมาจากปริภูมิอิงระยะทาง บทที่ 3 กล่าวถึงการส่งที่ต่อเนื่องระหว่างปริภูมิทอพอโลยีรวมถึงสมบัติต่างๆ บทที่ 4 กล่าวถึงความเชื่อมโยงและความกระชับบนปริภูมิทอพอโลยี บทที่ 5 กล่าวถึงการจำแนกชนิดของปริภูมิทอพอโลยีโดยใช้สัจพจน์การนับได้ และ สัจพจน์การแบ่งแยก และบทที่ 6 บทสุดท้ายเป็นการประยุกต์นำความรู้ที่เรียนมาใช้กับทฤษฎีจุดตรึง

สุดท้ายนี้ผู้เขียนหวังว่าหนังสือเล่มนี้จะมีประโยชน์กับผู้เรียนที่สนใจศึกษาวิชาทอพอโลยีขั้นพื้นฐาน และถ้ามีข้อผิดพลาดประการใดผู้เขียนต้องขออภัยมา ณ ที่นี้



ผศ.ดร.กันย์ สุนย์ชัน
พฤษภาคม 2565

สารบัญ

หัวข้อ	หน้า
ความรู้พื้นฐาน (Basic concepts)	1
บทที่ 1 ปริภูมิอิงระยะทาง (Metric spaces)	4
แบบฝึกหัดประจำบทที่ 1	23
บทที่ 2 ปริภูมิทอพอโลยี (Topological spaces)	25
แบบฝึกหัดประจำบทที่ 2	37
บทที่ 3 การต่อเนื่องของฟังก์ชัน (Continuity of functions)	38
แบบฝึกหัดประจำบทที่ 3	48
บทที่ 4 ความเชื่อมโยงและความกระชับ (Connectedness and compactness)	49
แบบฝึกหัดประจำบทที่ 4	70
บทที่ 5 สัจพจน์การนับได้และการแบ่งแยก (Countability and separation axioms)	71
แบบฝึกหัดประจำบทที่ 5	86
บทที่ 6 การประยุกต์สู่ทฤษฎีบทจุดตรึง (Applications to fixed point theorems)	87
ดัชนี	95
บรรณานุกรม	100

ความรู้พื้นฐาน

(Basic concepts)

ในหัวข้อนี้ผู้เขียนได้รวบรวมความรู้พื้นฐานที่จำเป็นต่อการศึกษาหนังสือเล่มนี้ สำหรับผู้อ่านที่ต้องการเนื้อหาเพิ่มเติมสามารถหารายละเอียดเพิ่มเติมได้จาก หนังสือในรายวิชาหลักคณิตศาสตร์ (Principle of mathematics) และทฤษฎีเซต (Set theory)

ต่อไปจากนี้เราจะให้สัญลักษณ์ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ และ $\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนนับ (natural numbers) เซตของจำนวนเต็ม (integers) เซตของจำนวนตรรกยะ (rational numbers) เซตของจำนวนจริง (real numbers) และเซตของจำนวนเชิงซ้อน (complex numbers) ตามลำดับ

- สำหรับ $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า จำนวนจริง u เป็นขอบเขตบน (upper bound) ของ A เมื่อ $u \geq a, \forall a \in A$
 ในทำนองกลับกัน จำนวนจริง ℓ เป็นขอบเขตล่าง (lower bound) ของ A เมื่อ $\ell \leq a, \forall a \in A$
 เรานิยาม $\sup A$ ให้เป็นขอบเขตบนตัวที่เล็กสุด (least upper bound หรือ supremum) ของ A (ถ้ามี) และ $\inf A$ ให้เป็นขอบเขตล่างตัวที่ใหญ่สุด (greatest lower bound หรือ infimum) ของ A (ถ้ามี)
 ถ้า $\sup A \in A$ เราจะเขียนแทน $\sup A$ ด้วย $\max A$ เรียกว่าค่าสูงสุด (maximum) ของ A และ ถ้า $\inf A \in A$ เราจะเขียนแทน $\inf A$ ด้วย $\min A$ เรียกว่าค่าต่ำสุด (minimum) ของ A
- สำหรับเซต X ใดๆ และ $A, B \subseteq X$
 - $P(X) = \{S \mid S \subseteq X\}$ แทนเซตกำลัง (power set) ของ X
 - $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$ แทน ยูเนียน (union) ของเซต A และ B
 - $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$ แทน อินเตอร์เซกชัน (intersection) ของเซต A และ B ถ้า $A \cap B = \emptyset$ เรากล่าวว่า A ไม่มีส่วนร่วม (disjoint) กับ B
 - $A - B = \{x \mid x \in A \text{ แต่ } x \notin B\}$ แทน ผลต่าง (difference) ของเซต A และ B
 - เราจะกล่าวว่า X เป็นเซตนับได้ (countable set) ถ้า $X = \emptyset$ หรือมีฟังก์ชันทั่วถึง $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ และจะกล่าวว่า X เป็นเซตนับไม่ได้ (uncountable set) ถ้า X ไม่เป็นเซตนับได้

- สำหรับเซต $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ เรานิยาม ผลคูณคาร์ทีเซียน (cartesian product) แทนด้วย $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n$ ให้เป็นเซต

$$\{(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \mid x_i \in X_i \text{ สำหรับทุก } i=1, 2, 3, \dots, n\}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า X_i เท่ากับเซต X สำหรับทุก $i=1, 2, 3, \dots, n$ เราจะเขียนแทน $X_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots \times X_n$ ด้วย X^n

- สำหรับเซต X ใดๆ และ $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ เรานิยาม

$$- \bigcup \mathcal{A} = \{x \mid x \in A, \exists A \in \mathcal{A}\}$$

$$- \bigcap \mathcal{A} = \{x \mid x \in A, \forall A \in \mathcal{A}\}$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $\mathcal{A} = \{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ โดยที่ I คือเซตดัชนี เรามีสมบัติเรียกว่า กฎของเดอมอร์แกน (De Morgan's law) ดังนี้

$$- X - \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcap_{\alpha \in I} (X - A_\alpha)$$

$$- X - \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X - A_\alpha)$$

- สำหรับเซต X, Y ใดๆ และ $f: X \rightarrow Y$ ถ้า $A \subseteq X$ และ $B \subseteq Y$ แล้วเรานิยาม

$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$ เรียกว่า ภาพ(image) ของ A ภายใต้ f และนิยาม

$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ เรียกว่า ภาพผกผัน(preimage) ของ B ภายใต้ f เรามีสมบัติของภาพและภาพผกผันภายใต้ f ดังนี้

$$- f(X - A) \supseteq f(X) - f(A) \text{ โดยจะเท่ากันเมื่อ } f \text{ เป็นฟังก์ชัน 1-1}$$

$$- f^{-1}(Y - B) = X - f^{-1}(B)$$

$$- f^{-1}(f(A)) \supseteq A \text{ โดยจะเท่ากันเมื่อ } f \text{ เป็นฟังก์ชัน 1-1}$$

$$- f(f^{-1}(B)) \subseteq B \text{ โดยจะเท่ากันเมื่อ } f \text{ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง}$$

- สำหรับเซต X, Y ใดๆ และ $f: X \rightarrow Y$ ถ้า $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq P(X)$ และ

$\{B_\beta \mid \beta \in J\} \subseteq P(Y)$ โดยที่ I และ J แทนเซตดัชนี แล้วเรามีว่า

$$- f(\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I} f(A_\alpha)$$

$$- f(\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha) \subseteq \bigcap_{\alpha \in I} f(A_\alpha) \text{ โดยจะเท่ากันเมื่อ } f \text{ เป็นฟังก์ชัน 1-1}$$

$$- f^{-1}(\bigcup_{\beta \in J} B_\beta) = \bigcup_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$$

$$- f^{-1}(\bigcap_{\beta \in J} B_\beta) = \bigcap_{\beta \in J} f^{-1}(B_\beta)$$

- สำหรับเซต X ใดๆ ให้ $\sim$ แทนความสัมพันธ์บนเซต X นั่นคือ $\sim \subseteq X \times X$

เราจะกล่าวว่า $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) ถ้า $\sim$

สอดคล้องสมบัติสามข้อต่อไปนี้ สำหรับ $x, y, z \in X$ เรามีว่า

(i) $x \sim x$ (reflexive)

(ii) ถ้า $x \sim y$ แล้ว $y \sim x$ (symmetric)

(iii) ถ้า $x \sim y$ และ $y \sim z$ แล้ว $x \sim z$ (transitive)

สำหรับความสัมพันธ์สมมูล $\sim$ บนเซต X และ $x \in X$ เรานิยามชั้นสมมูล

(equivalence class) ของ x ภายใต้อัตลักษณ์ $\sim$ ให้เป็นเซต

$$[x]_{\sim} = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

และให้สัญลักษณ์ $X/\sim$ แทนเซตของชั้นสมมูลทั้งหมดภายใต้อัตลักษณ์ $\sim$

เรามีว่า $X/\sim$ เป็นผลแบ่งกัน (partition) กล่าวคือ $\bigcup X/\sim = X$ และสำหรับ ชั้น

สมมูลสองชั้นสมมูลใดๆที่แตกต่างกันจะอินเตอร์เซกกันเป็นเซตว่าง

- สัจพจน์การเลือก (Axiom of Choice) กล่าวว่า

สำหรับเซต $\mathcal{S} = \{S_i\}_{i \in I}$ โดยที่ $S_i \neq \emptyset$ ทุกๆ $i \in I$ เมื่อ I แทนเซตดัชนี

แล้วจะมี เซต $(x_i)_{i \in I}$ โดยที่ $x_i \in S_i$ ทุกๆ $i \in I$

ตลอดหนังสือเล่มนี้ ผู้เขียนยอมรับสัจพจน์การเลือกข้างต้นว่าเป็นจริง

บทที่ 1 ปริภูมิอิงระยะทาง

(Metric spaces)

ในการวิเคราะห์เชิงจำนวนจริง (Real Analysis) เราได้ศึกษาสมบัติต่างๆบนเซตของจำนวนจริง หนึ่งในสมบัติที่น่าสนใจก็คือ สำหรับจุดสองจุดใดๆบนเส้นจำนวนเราสามารถวัดระยะทางระหว่างจุดสองจุด โดยเราสามารถสังเกตได้ว่าการวัดระยะทางนั้นมีสมบัติดังต่อไปนี้

1. ระยะทางสำหรับจุดสองจุดใดๆมีค่าไม่ติดลบ
2. ระยะทางระหว่างจุดสองจุดซึ่งเป็นจุดเดียวกันมีค่าเท่ากับศูนย์
3. ระยะทางระหว่างจุด A ไปยังจุด B มีค่าเท่ากับระยะทางจากจุด B ไปยังจุด A
4. ระยะทางระหว่างจุด A ไปยังจุด B มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ ระยะทางจากจุด A ไปยัง

จุด B โดยเดินทางผ่านจุดที่สาม C

จากสมบัติของการวัดระยะทางดังกล่าวทำให้เราสามารถนำมาประยุกต์นิยามปริภูมิอิงระยะทางบนเซตใดๆได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 กำหนดให้ X เป็นเซตใดๆที่ไม่ว่าง การวัดระยะทางบนเซต X (metric on X) คือ ฟังก์ชัน $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่งมีสมบัติว่า สำหรับ $x, y, z \in X$

$$d1. d(x, y) \geq 0$$

$$d2. d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d3. d(x, y) = d(y, x)$$

$$d4. d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad [\text{อสมการสามเหลี่ยม (Triangle Inequality)}]$$

และเราเรียกคู่อันดับ (X, d) ว่าปริภูมิอิงระยะทาง (metric space)

ตัวอย่างที่ 1.1

1.1.1 ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง และนิยาม $d_{\text{usual}}(x, y) = |x - y|$ สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}$ จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์เราเห็นได้ชัดว่า d_{usual} เป็นการวัดระยะทางบน $\mathbb{R}$ และ ถูกเรียกว่าการวัดระยะทางแบบปกติบน $\mathbb{R}$

1.1.2 สำหรับ $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ เราสามารถนิยามการวัดระยะทางแบบยูคลิด(Euclidean metric) ได้ดังนี้ สำหรับ $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ นิยาม

$$d_e((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า d_e สอดคล้อง $d1. - d3$. จากอสมการสามเหลี่ยมบน $\mathbb{R}$ และจากการพิสูจน์แบบย้อนกลับเราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า d_e สอดคล้อง $d4$.

ในทำนองเดียวกัน บน $\mathbb{R}^n$ โดยที่ n เป็นจำนวนนับ เราสามารถนิยามการวัดระยะทางแบบยูคลิดได้ดังนี้ สำหรับ $(x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ นิยาม

$$d_e((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

เราเห็นได้ชัดว่า d_e สอดคล้อง $d1. - d3$. ต่อไปจะแสดงว่า d_e สอดคล้อง $d4$.

เพื่อให้่ายต่อการพิสูจน์เราจะให้สัญลักษณ์ดังต่อไปนี้ สำหรับ $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ

$q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ นิยาม $|p| = \sqrt{p \cdot p}$ โดยที่ $p \cdot p$ แทนผลคูณเชิงสเกลาร์ (dot product) ดังนั้น จะได้ว่า $d_e(p, q) = |p - q|$

ในการแสดงว่า d_e สอดคล้อง $d4$. นั้นเราต้องอาศัยอสมการ โคชี-ชวาร์ซ (Cauchy-Schwarz Inequality) ซึ่งกล่าวว่าสำหรับ $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ และ $q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ ได้ว่า

$$|p \cdot q| \leq |p||q|$$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\begin{aligned} |p + q|^2 &= (p + q) \cdot (p + q) \\ &= |p|^2 + 2(p \cdot q) + |q|^2 \\ &\leq |p|^2 + 2|p \cdot q| + |q|^2 \\ &\leq |p|^2 + 2|p||q| + |q|^2 \\ &= (|p| + |q|)^2 \end{aligned}$$

หรือ $|p + q| \leq |p| + |q|$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $p = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ และ

$r = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ เราได้ว่า

$$\begin{aligned} d_e(p, r) &= |p - r| \\ &= |p - q + q - r| \\ &\leq |p - q| + |q - r| \\ &= d_e(p, q) + d_e(q, r) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(\mathbb{R}^n, d_e)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง เรียกว่า ปริภูมิของยูคลิด (Euclidean space)

1.1.3 กำหนดให้ X เป็นเซต และนิยาม $d_{\text{dis}} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ โดย

$$d_{\text{dis}}(x, y) = \begin{cases} 0 & , x = y \\ 1 & , x \neq y \end{cases}$$

เราสามารถแสดงได้ไม่ยากว่า d_{dis} เป็นการวัดระยะทางบนเซต X ดังนั้น (X, d_{dis}) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ซึ่งถูกเรียกว่า ปริภูมิวิยุต (discrete space)

1.1.4 ให้ $B(\mathbb{R})$ แทนเซตของลำดับของจำนวนจริงทั้งหมดที่มีขอบเขต

(ลำดับ (x_n) มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก M ที่ซึ่ง $|x_n| \leq M$ ทุก $n \in \mathbb{N}$)

นิยาม $d_{\text{sup}} : B(\mathbb{R}) \times B(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ โดย

$$d_{\text{sup}}((x_n), (y_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

สำหรับทุก $(x_n), (y_n) \in B(\mathbb{R})$

เห็นได้ชัดว่า d_{sup} สอดคล้อง d1. – d3. และ สำหรับ $(x_n), (y_n), (z_n) \in B(\mathbb{R})$ เรามีว่า สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$

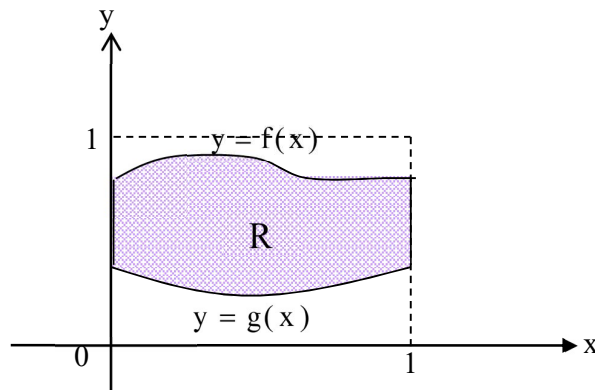
$$\begin{aligned} |x_n - z_n| &\leq |x_n - y_n| + |y_n - z_n| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |y_n - z_n| \end{aligned}$$

ดังนั้น $d_{\text{sup}}((x_n), (z_n)) \leq d_{\text{sup}}((x_n), (y_n)) + d_{\text{sup}}((y_n), (z_n))$

นั่นคือ d_{sup} สอดคล้อง d4. เพราะฉะนั้น $(B(\mathbb{R}), d_{\text{sup}})$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

1.1.5 ให้ $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง} \}$ นิยาม

$$d_A(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$



จากรูปเราจะได้ว่า $d_A(f, g) =$ พื้นที่ของบริเวณ R นั่นเอง เห็นได้ชัดว่า d_A สอดคล้อง d1. – d3.

และจากความจริงที่ว่าสำหรับฟังก์ชัน $f(x), g(x) \geq 0$ ต่อเนื่องที่นิยามบนช่วงปิด $[a, b]$ ถ้า

$f(x) \leq g(x)$ แล้ว $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ เราสามารถแสดงได้ว่า d_A สอดคล้อง d_4 . ดังนั้น

$(C[0,1], d_A)$ เป็นปริภูมิอิงระยะทาง

สำหรับปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) และ เซตย่อย Y ของ X เราสามารถพิจารณา Y เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่ถูกถ่ายทอดจาก X ได้ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2 กำหนดให้ Y เป็นเซตย่อยของ ปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) เราสามารถพิจารณา การจำกัดโดเมนของ การวัดระยะทาง จาก d เป็น $d_{|Y \times Y}$ ซึ่งเป็นการวัดระยะทางบน Y เราเรียก $(Y, d_{|Y \times Y})$ ว่าเป็น ปริภูมิอิงระยะทางย่อย(subspace) ของ (X, d)

ตัวอย่าง 1.2 ให้ $Y = [0,1]$ เป็นช่วงบนเส้นจำนวนจริง $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ เราได้ว่า (Y, d_{usual}) ปริภูมิอิงระยะทางย่อย ของ $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$

ต่อไปจะนิยามเซตย่อยของปริภูมิอิงระยะทางที่สำคัญในการศึกษาสมบัติต่างๆ ซึ่งก็คือบอลเปิดและบอลปิดดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.3 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง สำหรับจำนวนจริง $r > 0$ และ $x \in X$ เรานิยาม

บอลเปิดจุดศูนย์กลาง ที่ x รัศมี r ให้เป็น (open ball centered at x with radius r)

$$B(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\} \text{ และ}$$

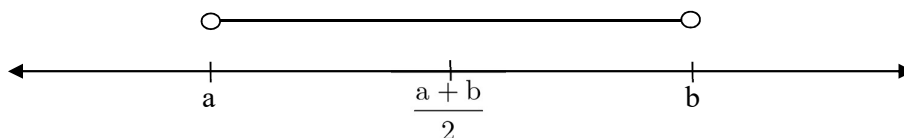
บอลปิดจุดศูนย์กลาง ที่ x รัศมี r ให้เป็น (closed ball centered at x with radius r)

$$B_c(x; r) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq r\}$$

ตัวอย่าง 1.3

1.3.1 สำหรับ $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ เราได้ว่าช่วงเปิด (a, b) ใดๆ เป็นบอลเปิด นั่นคือ

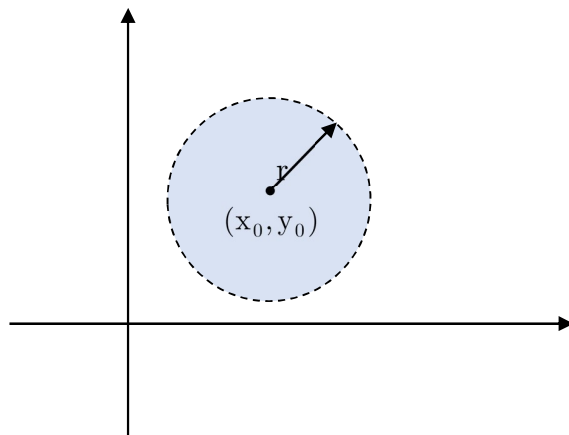
$$(a, b) = B\left(\frac{a+b}{2}; \frac{b-a}{2}\right)$$



1.3.2 สำหรับ $(\mathbb{R}^2, d_{\text{usual}})$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ และ $r > 0$ ได้ว่า

$$B((x_0, y_0); r) = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

นั่นคือบริเวณภายในวงกลมจุดศูนย์กลางที่ (x_0, y_0) และรัศมี r ดังรูปต่อไปนี้



บทนิยาม 1.4 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $U \subseteq X$ เรากล่าวว่า U เป็นเซตเปิด (open set) ของ X ก็ต่อเมื่อ สำหรับ x ใดๆ ใน U จะมีจำนวนจริง $r_x > 0$ ที่ซึ่ง $x \in B(x; r_x) \subseteq U$ [$\forall x \in U \exists r_x > 0, x \in B(x; r_x) \subseteq U$]

ทฤษฎีบทที่ 1.1 ทุกๆบอลเปิดเป็นเซตเปิด

บทพิสูจน์ ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง $x \in X$ และ $r > 0$

ต้องการแสดงว่า $B(x; r)$ เป็นเซตเปิด

ให้ $y \in B(x; r)$ ได้ว่า $d(x, y) < r$ ดังนั้นกำหนดให้ $r_y = r - d(x, y) > 0$

ถัดไปจะแสดงว่า $B(y; r_y) \subseteq B(x; r)$

ให้ $z \in B(y; r_y)$ ได้ว่า

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + r_y = d(x, y) + r - d(x, y) = r$$

แสดงว่า $y \in B(y; r_y) \subseteq B(x; r)$ เพราะฉะนั้น $B(x; r)$ เป็นเซตเปิด □

บทนิยาม 1.5 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $E \subseteq X$ จุด $x \in E$ จะเป็น จุดภายในของเซต E (interior point of E) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง $r > 0$ ที่ซึ่ง $B(x; r) \subseteq E$ และแทนเซตของจุดภายในทั้งหมดของ E ด้วย $\text{Int}(E)$ หรือ E°

$$[x \in E^\circ \Leftrightarrow \exists r_x > 0, B(x; r_x) \subseteq E]$$

ข้อสังเกต จากบทนิยามเราได้ว่า $E^\circ \subseteq E$

ตัวอย่าง 1.4

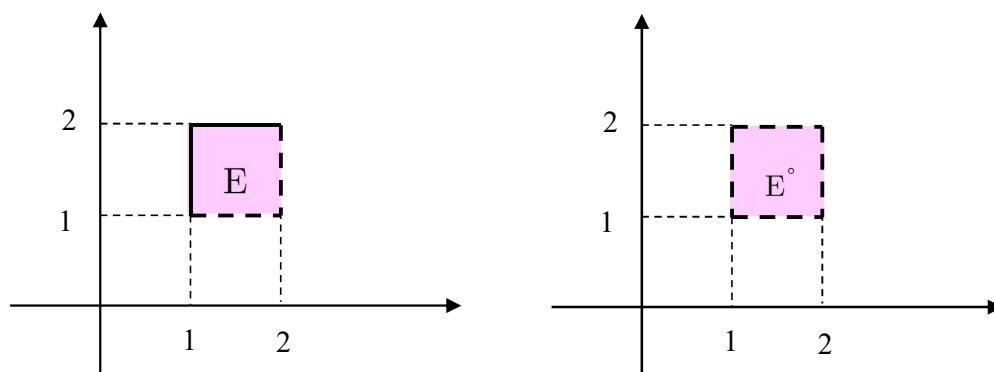
1.4.1 สำหรับ $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ และ ให้ $E = (a, b), [a, b), (a, b]$ หรือ $[a, b]$ เราได้ว่า $E^\circ = (a, b)$

สำหรับทุกๆ $a, b \in \mathbb{R}$ และได้อีกว่า

$$\mathbb{N}^\circ = \emptyset, \quad \mathbb{Z}^\circ = \emptyset, \quad \mathbb{Q}^\circ = \emptyset, \quad \mathbb{Q}^c = \emptyset$$

เมื่อ $\mathbb{Q}^c$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

1.4.2 สำหรับ $(\mathbb{R}^2, d_{\text{usual}})$ และให้ $E = [1, 2) \times (1, 2]$ เราจะได้ว่า $E^\circ = (1, 2) \times (1, 2)$



ทฤษฎีบทที่ 1.2 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ถ้า $E \subseteq X$ แล้วเราได้ว่า E° เป็นเซตเปิด

บทพิสูจน์ ให้ $x \in E^\circ$ ได้ว่าจะมี $r > 0$ ที่ซึ่ง $x \in B(x; r) \subseteq E$

ต่อไปเราต้องการแสดงว่า $B(x; r) \subseteq E^\circ$

ให้ $z \in B(x; r)$ ดังนั้น $d(x, z) < r$ จากนั้นได้ว่า ถ้าเราให้ $r' = r - d(x, z)$ แล้ว $r' > 0$

ให้ $y \in B(z; r')$ จะได้ว่า $d(y, z) < r'$

ดังนั้น $d(x, y) \leq d(y, z) + d(z, x) < r' + d(z, x) = r$

นั่นคือ $y \in B(x, r)$ หรือ $B(z; r') \subseteq B(x, r) \subseteq E$

เพราะฉะนั้น $B(x; r) \subseteq E^\circ$ หรือ E° เป็นเซตเปิด นั่นเอง

□

บทแทรก 1.3 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ถ้า $E \subseteq X$ แล้วเราได้ว่า E เป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ $E = E^\circ$

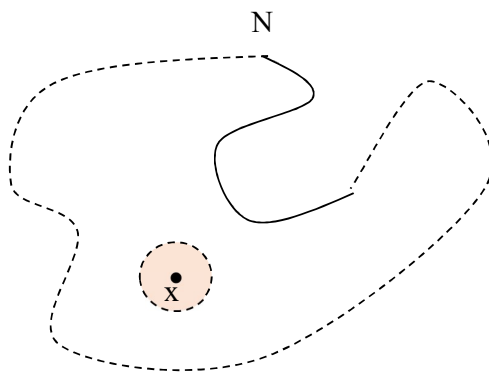
บทพิสูจน์ ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทที่ 2

□

บทนิยาม 1.6 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง $x \in X$ และ $N \subseteq X$ เราจะกล่าวว่า N เป็นย่านใกล้เคียงของ x (neighborhood of x) ถ้ามี $r > 0$ ที่ซึ่ง $B(x; r) \subseteq N$ และถ้า N เป็นเซตเปิด เราจะเรียก N ว่า ย่านใกล้เคียงเปิดของ x (open neighborhood of x)

ข้อสังเกต

1. สำหรับเซตเปิด N ใดๆ เราจะได้ว่าทุกๆ $x \in N$ เราได้ว่า N ว่า ย่านใกล้เคียงเปิดของ x
2. สำหรับย่านใกล้เคียง N ของ x , N ไม่จำเป็นต้องเป็นเซตเปิด



ต่อไปเป็นสมบัติที่สำคัญของเซตเปิดใดๆบนปริภูมิอิงระยะทาง

ทฤษฎีบทที่ 1.4

1.4.1 ยูเนียนของเซตเปิดใดๆเป็นเซตเปิด

(Any arbitrary unions of open sets are open)

1.4.2 อินเตอร์เซกชันจำนวนจำกัดของเซตเปิดเป็นเซตเปิด

(Any finite intersections of open sets are open)

บทพิสูจน์

1.4.1 ให้ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นกลุ่มของเซตเปิด โดยที่ I เป็นเซตดัชนี

กำหนดให้ $U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ ต้องการแสดงว่า U เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in U$ ดังนั้น $x \in U_{\alpha_0}$ สำหรับบาง $\alpha_0 \in I$ เนื่องจาก U_{α_0} เป็นเซตเปิด ดังนั้นมี $r > 0$ ที่ซึ่ง

$x \in B(x; r) \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq U$ นั่นคือ U เป็นเซตเปิด

1.4.2 ให้ $\{U_i\}_{i=1}^n$ เป็นกลุ่มของเซตเปิด U_i สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$

กำหนดให้ $V = \bigcap_{i=1}^n U_i$ ต้องการแสดงว่า V เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in V$ ดังนั้น $x \in V_i$ สำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ เนื่องจาก V_i เป็นเซตเปิด ดังนั้น มี

$r_i > 0$ ที่ซึ่ง $x \in B(x; r_i) \subseteq V_i$ ทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$

กำหนดให้ $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ ดังนั้นได้ว่า $B(x; r) \subseteq B(x; r_i) \subseteq V_i$ สำหรับทุกๆ

$i = 1, 2, \dots, n$ ได้ว่า $x \in B(x; r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i = V$ นั่นคือ V เป็นเซตเปิด $\square$

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบทที่ 1.1 เรามีว่าทุกบอลเปิดเป็นเซตเปิด แต่ในทางกลับกัน ทุกๆเซตเปิดไม่จำเป็นต้องเป็นบอลเปิด ดังตัวอย่างเช่น $E = (0, 1) \cup (1, 2)$ เป็นเซตเปิดใน $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ แต่เราไม่สามารถหา $x \in E$ หรือ $r > 0$ ที่ซึ่ง $E = B(x; r)$

ทฤษฎีบทถัดไปแสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างเซตเปิดกับบอลเปิด

ทฤษฎีบทที่ 1.5 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ถ้า $U \subseteq X$ แล้วเราจะได้ว่า U เป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ U สามารถเขียนได้ในรูปยูเนียนของบอลเปิดใน X

บทพิสูจน์

สำหรับการพิสูจน์ขากลับนั้นเห็นได้ชัดจาก ทฤษฎีบทที่ 1.4.1 จึงเพียงพอที่จะพิสูจน์เฉพาะขาไปของทฤษฎีบท

สมมติให้ U เป็นเซตเปิด และ $x \in U$ เราได้ว่ามี $r_x > 0$ ที่ซึ่ง $x \in B(x; r_x) \subseteq U$

ดังนั้นเราสามารถพิสูจน์ได้ไม่ยากว่าจริงๆแล้ว $U = \bigcup_{x \in U} B(x; r_x)$ $\square$

ตัวอย่าง 1.5

1. $\mathbb{R}$ และ $\mathbb{R}^2$ เป็นเซตเปิดเนื่องจาก $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, n)$ และ $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_{\text{usual}}((0, 0); n)$

2. สำหรับ (X, d_{discrete}) เมื่อ X เป็นเซตใดๆ เราได้ว่าบอลเปิดในปริภูมินี้แบ่งออกเป็นสองแบบคือ

กรณี 1 ($r \geq 1$) เราได้ว่า $B(x; r) = X$ สำหรับ $x \in X$

กรณี 2 ($0 < r < 1$) เราได้ว่า $B(x; r) = \{x\}$ สำหรับ $x \in X$

ดังนั้นจึงได้ว่า เซตย่อย U ใดของปริภูมิ (X, d_{discrete}) เป็นเซตเปิด เพราะว่า $U = \bigcup_{x \in U} \{x\}$

ทฤษฎีบทที่ 1.6 ให้ Y เป็นปริภูมิย่อยของปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) และ V เป็นเซตย่อยใดๆ ของ Y จะได้ว่า V เป็นเซตเปิดใน Y ก็ต่อเมื่อ $V = U \cap Y$ สำหรับบางเซตเปิด U ใน X

บทพิสูจน์

สมมติให้ V เป็นเซตเปิดใน Y

ให้ $x \in V$ จะได้ว่า มี $r_x > 0$ ที่ซึ่ง $B_Y(x; r_x) \subseteq V$ โดยที่ $B_Y(x; r_x)$ แทนบอลเปิดใน Y สังเกตว่า

$$\begin{aligned} B_Y(x; r_x) &= \{y \in Y \mid d(x, y) < r_x\} \\ &= \{y \in X \mid d(x, y) < r_x\} \cap Y \\ &= B(x; r_x) \cap Y \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ว่า } V = \bigcup_{x \in V} B_Y(x; r_x) = \left(\bigcup_{x \in V} B(x; r_x) \right) \cap Y = U \cap Y$$

โดยที่ $U = \bigcup_{x \in V} B(x; r_x)$ เป็นเซตเปิดใน X

ในทางกลับกัน สมมติให้ $V = U \cap Y$ สำหรับบางเซตเปิด U ของ X

ให้ $x \in V = U \cap Y$ ได้ว่า $x \in U$ และ $x \in Y$

เนื่องจาก U เป็นเซตเปิด ดังนั้น จะมี $r > 0$ ที่ซึ่ง $B(x; r) \subseteq U$

จากข้อสังเกตข้างต้นเราได้ว่า $x \in B_Y(x; r) = B(x; r) \cap Y \subseteq U \cap Y = V$

นั่นคือเราได้แสดงแล้วว่า V เป็นเซตเปิดใน Y □

บทนิยาม 1.7 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ A เป็นเซตย่อยใดๆ ของ X เรากล่าวว่าจุด x เป็น จุดเกาะกลุ่ม (accumulation point or limit point) ของ A ถ้าสำหรับทุกๆ $\epsilon > 0$ จะได้ว่า $(B(x; \epsilon) \cap A) - \{x\} \neq \emptyset$ และ ให้ A' แทนเซตของจุดเกาะกลุ่มทั้งหมดของ A เรายานิยามและแทนสัญลักษณ์ ส่วนปิดคลุมของเซต A (closure of A) เป็น $\text{Cl}(A)$ หรือ $\overline{A} = A \cup A'$

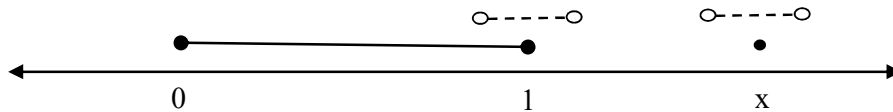
ข้อสังเกต 1. $\text{Cl}(A) = \overline{A} = A \cup A'$

$$= \{x \in X \mid \forall \epsilon > 0, B(x; \epsilon) \cap A \neq \emptyset\}$$

2. จากบทนิยามได้ว่า $A \subseteq \overline{A}$

บทนิยาม 1.8 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ A เป็นเซตย่อยใดๆ ของ X เรา
จะกล่าวว่า A เป็นเซตปิด (closed set) ก็ต่อเมื่อ $A = \bar{A}$

ตัวอย่าง 1.6 ใน $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ เราจะได้ว่า ถ้าให้ $A = [0, 1)$ แล้วจะได้ว่า $1 \in \bar{A}$ เนื่องจาก
 $(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ และ สำหรับ $x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]$ จะได้ว่ามี $r > 0$ ที่
ซึ่ง $(x - r, x + r) \cap A = \emptyset$ ดังรูป ดังนั้น $\bar{A} = [0, 1]$



ตัวอย่าง 1.7

ใน $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ จะได้ว่าทุกๆ ช่วงปิด $[a, b]$ ใดๆ เป็นเซตปิด และ ในทำนองเดียวกัน $\mathbb{Z}$ เป็นเซต
ปิดใน $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ ส่วน $\mathbb{Q}$ และ $\mathbb{Q}^c$ ไม่ใช่เซตปิดใน $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ เนื่องจาก $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}^c}$

ทฤษฎีบทที่ 1.7 ให้ A เป็นเซตย่อยใดๆ ของปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) เราได้ว่า $\bar{A}$ เป็นเซตปิด

บทพิสูจน์ เราต้องการแสดงว่า $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ จากข้อสังเกตข้างต้นได้ว่า $\bar{A} \subseteq \bar{\bar{A}}$

ให้ $x \in \bar{\bar{A}}$ และให้ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $B(x; \varepsilon) \cap \bar{A} \neq \emptyset$ นั่นคือ มี $y \in X$ ที่ซึ่ง $y \in B(x; \varepsilon)$

และ $y \in \bar{A} = A \cup A'$

กรณี 1 $y \in A$ จะได้ว่า $B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

กรณี 2 $y \in A'$

เนื่องจาก $y \in B(x; \varepsilon)$ ดังนั้นจะมี $\varepsilon_0 > 0$ ที่ซึ่ง $y \in B(y; \varepsilon_0) \subseteq B(x; \varepsilon)$

และเนื่องจาก $y \in A'$ และ $\varepsilon_0 > 0$ แล้วจะได้ว่า $B(y; \varepsilon_0) \cap A - \{y\} \neq \emptyset$

ดังนั้นจะมี $z \neq y$ ที่ซึ่ง $z \in B(y; \varepsilon_0) \subseteq B(x; \varepsilon)$ และ $z \in A$ นั่นคือ $B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า $x \in \bar{A}$ เพราะฉะนั้น $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ ตามต้องการ $\square$

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้ $A = [1, 2]$, $B = (1, 2)$, $C = [1, 2)$ และ $D = \mathbb{R}$ ใน

$(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ จะได้ว่า A เป็นเซตปิด, B เป็นเซตเปิด, C เป็นเซตที่ไม่ใช่ทั้งปิดและเปิด, และเซต D

เป็นเซตที่ทั้งปิดและเปิด ดังนั้นการเป็นเซตปิดและเปิดบนปริภูมิอิงระยะทางไม่ได้ขึ้นอยู่กับกัน แต่มี

ความสัมพันธ์ดังจะแสดงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.8 ให้ A เป็นเซตย่อยใดๆ ของปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จะได้ว่า
 A เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ $X - A$ เป็นเซตเปิด

บทพิสูจน์ สมมติให้ A เป็นเซตปิด

ให้ $x \in X - A$ ดังนั้น $x \notin A = \bar{A}$ จะได้ว่า จะมี $\varepsilon > 0$ ที่ซึ่ง $B(x; \varepsilon) \cap A = \emptyset$ หรือ
 $B(x; \varepsilon) \subseteq X - A$ นั่นคือ เราได้พิสูจน์แล้วว่า $X - A$ เป็นเซตเปิด

ในทางกลับกัน สมมติให้ $X - A$ เป็นเซตเปิด

ต้องการแสดงว่า $A = \bar{A}$ แต่เห็นได้ชัดว่า $A \subseteq \bar{A}$ ดังนั้นเพียงพอที่จะแสดงว่า $\bar{A} \subseteq A$

ให้ $x \in \bar{A}$ สมมติว่า $x \notin A$ หรือ $x \in X - A$

ดังนั้นจะได้ว่า มี $\varepsilon > 0$ ที่ซึ่ง $B(x; \varepsilon) \subseteq X - A$ หรือ $B(x; \varepsilon) \cap A = \emptyset$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่

$x \in \bar{A}$

เพราะฉะนั้น $x \in A$ จึงได้ข้อสรุปว่า $\bar{A} \subseteq A$ ดังนั้น $A = \bar{A}$ □

บทแทรกที่ 1.9 ให้ A เป็นเซตย่อยใดๆ ของปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จะได้ว่า
 A เป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ $X - A$ เป็นเซตปิด

บทพิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทที่ 1.8 □

ตัวอย่าง 1.9

ใน $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ ได้ว่า $[0, \infty)$ เป็นเซตปิดใน $\mathbb{R}$ เพราะว่า $\mathbb{R} - [0, \infty) = (-\infty, 0)$ เป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบทที่ 1.10

1.10.1 ทุกๆ อินเตอร์เซกชันของเซตปิดใดเป็นเซตปิด

(Any arbitrary intersections of closed sets are closed)

1.10.2 ทุกๆ ยูเนียนจำนวนจำกัดของเซตปิดเป็นเซตปิด

(Any finite unions of closed sets are closed)

บทพิสูจน์

1.10.1 ให้ $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นกลุ่มของเซตปิด โดยที่ I เป็นเซตดัชนี

กำหนดให้ $C = \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ ต้องการแสดงว่า C เป็นเซตปิด

เนื่องจาก C_α เป็นเซตปิดสำหรับทุกๆ $\alpha \in I$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 1.8 ได้ว่า $X - C_\alpha$ เป็นเซตเปิดสำหรับทุกๆ $\alpha \in I$ และได้อีกว่า

$$X - C = X - \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X - C_\alpha)$$

โดยทฤษฎีบทที่ 1.4.1 เราได้ว่า $X - C$ เป็นเซตเปิด เพราะฉะนั้นในทำนองเดียวกันจาก ทฤษฎีบทที่ 1.8 ได้ว่า C เป็นเซตปิด

1.10.2 ให้ $\{C_i\}_{i=1}^n$ เป็นกลุ่มของเซตปิด สำหรับ $i = 1, 2, \dots, n$

กำหนดให้ $D = \bigcup_{i=1}^n C_i$ ต้องการแสดงว่า D เป็นเซตปิด

เนื่องจาก C_i เป็นเซตปิดสำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 1.8 ได้ว่า $X - C_i$ เป็นเซตเปิดสำหรับทุกๆ $i = 1, 2, \dots, n$ และได้อีกว่า

$$X - D = X - \bigcup_{i=1}^n C_i = \bigcap_{i=1}^n (X - C_i)$$

โดยทฤษฎีบทที่ 1.4.2 เราได้ว่า $X - D$ เป็นเซตเปิด เพราะฉะนั้นในทำนองเดียวกันจาก ทฤษฎีบทที่ 1.8 ได้ว่า D เป็นเซตปิด $\square$

บทนิยาม 1.9 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ A เป็นเซตย่อยใดๆ ของ X เรากล่าวว่าจุด x เป็น จุดขอบ (boundary point) ของ A ถ้าสำหรับทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ และ $B(x; \varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$ และให้ ∂A แทนเซตของจุดขอบทั้งหมดของ A

นอกจากเราสามารถนิยามการวัดระยะทางระหว่างจุดสองจุดบนปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) เรายังสามารถนิยามระยะทางระหว่างจุดกับเซตรวมถึงขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางของเซตได้ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.10 กำหนดให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ A เป็นเซตย่อยที่ไม่ว่างใดๆ ของ X และ $x \in X$

- ระยะทางระหว่าง x และ A (distance between x and A) คือ

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$$

- ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลาง (diameter) ของ A คือ

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(a, b) \mid a, b \in A\}$$

ถ้า $\text{diam}(A)$ เป็นจำนวนจำกัดแล้วเราจะกล่าวว่า A เป็นเซตมีขอบเขต (bounded)

และ เรียก A ว่าเป็นเซตไม่มีขอบเขต (unbounded) สำหรับกรณีอื่นๆ

ตัวอย่าง 1.10

ใน $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ ให้ $A = (1, 3)$, $B = (4, 6)$ เราจะได้ว่า $\text{diam}(A) = \text{diam}(B) = 2$ แต่ $\text{diam}(A \cup B) = 5 \geq \text{diam}(A) + \text{diam}(B)$ ดังนั้น diam ไม่ใช้การวัดระยะทางบน $P(\mathbb{R})$

ลำดับในปริภูมิอิงระยะทาง (sequence in metric space)

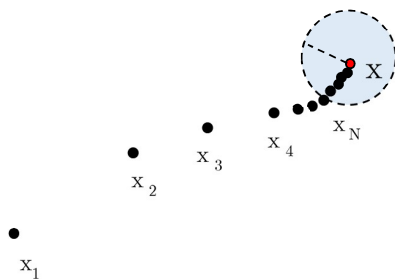
บทนิยาม 1.11 ลำดับ(sequence)ในปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) คือ ฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \rightarrow X$ นิยามโดย $f(n) = x_n$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เราเขียนแทนฟังก์ชัน f ด้วย $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ หรือสั้นๆ ด้วย (x_n)

บทนิยาม 1.12 ลำดับ (x_n) ในปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จะกล่าวว่า ลู่เข้าสู่(converge to) $x \in X$ หรือ (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) ก็ต่อเมื่อ ทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N$ แล้วเราจะได้ว่า $d(x_n, x) < \varepsilon$

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon]$$

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ หรือ $x_n \rightarrow x$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ และเราเรียก x ว่าเป็นลิมิต (limit) ของลำดับ (x_n)

ถ้าลำดับ (x_n) ไม่เป็นลำดับลู่เข้า แล้วเราจะกล่าวว่า (x_n) เป็นลำดับลู่ออก (divergent sequence)

**ตัวอย่าง 1.11**

1. ในปริภูมิอิงระยะทาง $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ เราจะเห็นว่า $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ เพราะว่า สำหรับ

ทุก $\varepsilon > 0$ โดยหลักของอาคิมิดีส จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $\frac{1}{\varepsilon} < N$ หรือ $\frac{1}{N} < \varepsilon$ ดังนั้น

สำหรับ $n \geq N$ เราจะได้ว่า $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

2. กำหนดให้ $C[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid f \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง} \}$ และ นิยามการวัดระยะทางบน $C[0, 1]$ ดังนี้ สำหรับ $f, g \in C[0, 1]$

$$d_{\text{sup}}(f, g) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$$

เราได้ว่า ลำดับ (f_n) ที่นิยามโดย $f_n(x) = x^n$ ลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน f_∞ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ โดยที่

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0 & , 0 \leq x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}$$

แต่เนื่องจาก f_∞ ไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นเราจึงกล่าวว่า (f_n) ไม่ใช่ฟังก์ชันลู่เข้าใน $C[0,1]$

ต่อไปเป็นสมบัติที่สำคัญของลำดับลู่เข้าบนปริภูมิอิงระยะทาง

ทฤษฎีบทที่ 1.11 ลำดับใดๆในปริภูมิอิงระยะทางมีลิมิตได้เพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น

บทพิสูจน์ สมมติให้ลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่จุด x, y ในปริภูมิอิงระยะทาง (X, d)

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ดังนั้นจะมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N_1$ แล้วเราจะได้ว่า

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

และในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = y$ ดังนั้นจะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N_2$ แล้วเรา

จะได้ว่า

$$d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ แล้วเราจะได้ว่า สำหรับ $n \geq N$ เรามีว่า

$$d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{ทุกๆ } \varepsilon > 0$$

ดังนั้น $x = y$

□

บทนิยาม 1.13 ให้ (x_n) เป็นลำดับในปริภูมิอิงระยะทาง (X, d)

ถ้า $k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \dots \leq k_n \leq \dots$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นของจำนวนนับ แล้วเราจะเรียก ลำดับ

(x_{k_n}) เป็นลำดับย่อย(subsequence)ของ ลำดับ (x_n)

ข้อสังเกต $k_n \geq n$

ตัวอย่าง 1.12 ในปริภูมิอิงระยะทาง $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ สำหรับลำดับ $(n) = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ เราได้ว่าลำดับ $(2n) = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ เป็นลำดับย่อยของ $(n) = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$

ในทำนองเดียวกัน ลำดับ $(kn) = \{k, 2k, 3k, \dots, kn, \dots\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ (n) สำหรับ
 ทุกๆ $k \in \mathbb{N}$ แต่สังเกตว่าลำดับ $\{2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots\}$ ไม่ใช่ลำดับย่อยของ (n)

ทฤษฎีบทที่ 1.12 ทุกๆลำดับย่อยของลำดับลู่เข้าเป็นลำดับลู่เข้า

บทพิสูจน์ ให้ (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า x ในปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) และ ให้ (x_{n_k}) เป็นลำดับย่อย
 ของลำดับ (x_n)

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ เราได้ว่าจะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N$ แล้วเราจะได้ว่า

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

เนื่องจาก $n_k \geq n > N$ ดังนั้นได้ว่า $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$ □

ข้อสังเกต

1. เนื่องจาก ลำดับ (x_n) ใดๆเป็นลำดับย่อยของตัวเอง ดังนั้นจากทฤษฎีบทที่ 14 เรา
 สามารถสรุปได้เป็นข้อความต่อไปนี้ สำหรับลำดับ (x_n) ในปริภูมิอิงระยะทาง

(x_n) เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ ทุกๆลำดับย่อยของ (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า

2. ถ้าเรามีลำดับซึ่งมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแล้ว เราไม่สามารถสรุปได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็น
 ลำดับลู่เข้าด้วยดังตัวอย่างที่จะแสดงต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.13 ในปริภูมิอิงระยะทาง $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$

พิจารณาลำดับ $((-1)^n) = \{-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots\}$

เราเห็นว่าลำดับ $(1) = \{1, 1, 1, \dots, 1, \dots\}$ และ ลำดับ $(-1) = \{-1, -1, -1, \dots, -1, \dots\}$

เป็นลำดับย่อยที่ลู่เข้าของลำดับ $((-1)^n)$ แต่ลำดับ $((-1)^n)$ ไม่ลู่เข้า

ในการที่จะแสดงว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับที่ลู่เข้า เราต้องทราบว่ามีลิมิตของลำดับนั้นมี
 ค่าเท่าใด ซึ่งในทางปฏิบัติถ้าเราไม่มีเครื่องมือที่เพียงพอในการคำนวณ การหาลิมิตของลำดับที่
 กำหนดให้เป็นเรื่องยาก ดังนั้นจึงมีการนิยามลำดับซึ่งมีพฤติกรรมคล้ายคลึงกับลำดับลู่เข้าดังนิยาม
 ต่อไปนี้

บทนิยาม 1.14 ลำดับ (x_n) ในปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จะกล่าวว่าเป็น ลำดับ โคชี (Cauchy
 Sequence) ถ้า ทุก $\varepsilon > 0$ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $m, n \geq N$ แล้วเราจะได้ว่า

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}, m, n \geq N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon]$$

ทฤษฎีบทที่ 1.13 ทุกๆลำดับลู่เข้าเป็นลำดับโคซี

บทพิสูจน์ ให้ (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า x ในปริภูมิระยะทาง (X, d)

ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ เราได้ว่าจะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N$ แล้วเราจะได้ว่า

$$d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ดังนั้นสำหรับ $m, n \geq N$ แล้วเราจะได้ว่า $d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

นั่นคือ (x_n) เป็นลำดับโคซี □

ในทางกลับกันเราจะได้ว่าลำดับโคซีใดๆไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับลู่เข้าดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.14 พิจารณา $A = (0, 1]$ เป็นปริภูมิย่อยของ $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ เราจะได้ว่า ลำดับ

$\left(\frac{1}{n}\right) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ เป็นลำดับที่ลู่เข้าสู่ 0 ดังนั้น ลำดับ $\left(\frac{1}{n}\right)$ เป็นลำดับโคซีใน A แต่

เนื่องจาก 0 ไม่อยู่ใน A ดังนั้นลำดับดังกล่าวจึงไม่เป็นลำดับลู่เข้าใน A

ทฤษฎีบทที่ 1.14 ทุกๆลำดับโคซี ที่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าจะเป็นลำดับลู่เข้า

บทพิสูจน์ ให้ (x_n) เป็นลำดับโคซีในปริภูมิระยะทาง (X, d) และ (x_{k_n}) เป็นลำดับย่อยของ

(x_n) ที่ลู่เข้าสู่ $x \in X$ ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก (x_n) เป็นลำดับโคซี ดังนั้นมี $N_1 \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $m, n \geq N_1$ แล้วเราจะได้ว่า

$$d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

และในทำนองเดียวกัน เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k_n} = x$ เราได้ว่าจะมี $N_2 \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N_2$

แล้วเราจะได้ว่า

$$d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ให้ $N = \max\{N_1, N_2\}$ แล้วเราจะได้ว่า สำหรับ $n \geq N$ เรามีว่า

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{k_n}) + d(x_{k_n}, x) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ นั่นคือ (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า □

บทนิยาม 1.15 ปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จะกล่าวว่าเป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ (complete metric space) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ ลำดับโคซีใน X เป็นลำดับที่ลู่เข้า

บทแทรกที่ 1.15 ปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จะเป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ ลำดับโคซี มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดจาก ทฤษฎีบทที่ 1.14 □

ต่อไปเป็นบทตั้งที่สำคัญที่แสดงให้เห็นถึงความสัมพันธ์ระหว่างลิมิตของลำดับและส่วนปิดของเซตใดๆ ในปริภูมิอิงระยะทาง

บทตั้งที่ 1.16 (บทตั้งอันดับ: The sequence lemma) ให้ A เป็นปริภูมิย่อยของ ปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) และ $x \in X$ แล้วจะได้ว่า $x \in \bar{A}$ ก็ต่อเมื่อ มีลำดับ (x_n) ใน A ที่ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

บทพิสูจน์

สมมติให้ $x \in \bar{A}$ ดังนั้นจะได้ว่า สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ เรามีว่า $B(x; \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้นจะมี $x_n \in B(x; \frac{1}{n}) \cap A$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ (โดยสัจพจน์การเลือก) นั่นคือเราได้สร้างลำดับ (x_n) ใน A ที่ซึ่ง $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น ถ้า $n \rightarrow \infty$ เราจะได้ว่า $d(x_n, x) \rightarrow 0$ หรือ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

ในทางกลับกัน ให้ $x \in X$ และสมมติว่ามี ลำดับ (x_n) ใน A ที่ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ดังนั้นมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N$ เราจะได้ว่า $d(x_n, x) < \varepsilon$ โดยเฉพาะอย่างยิ่ง $x_N \in B(x; \varepsilon) \cap A$ นั่นคือ $B(x; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้น $x \in \bar{A}$ □

ทฤษฎีบทที่ 1.17 ปริภูมิย่อยที่บริบูรณ์ของปริภูมิอิงระยะทางเป็นเซตปิด

บทพิสูจน์ สมมติให้ A เป็น ปริภูมิย่อยที่บริบูรณ์ของปริภูมิอิงระยะทาง (X, d)

ต้องการจะแสดงว่า $\bar{A} = A$ เพียงพอที่จะแสดงว่า $\bar{A} \subseteq A$

ให้ $a \in \bar{A}$ โดยบทตั้งที่ 1.16 จะได้ว่ามี ลำดับ (x_n) ใน A ที่ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

เนื่องจาก (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า เพราะฉะนั้น (x_n) เป็นลำดับโคซีด้วย
 และจากการที่ A เป็น ปริภูมิที่บริบูรณ์ ดังนั้น (x_n) เป็นปริภูมิที่ลู่เข้าใน A นั่นคือ $a \in A$
 หรือ $\bar{A} \subseteq A$ ดังนั้น $\bar{A} = A$ □

ทฤษฎีบทที่ 1.18 เซตย่อยปิดของปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ เป็น ปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์

บทพิสูจน์ ให้ A เป็น เซตย่อยปิดของปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ (X, d) และให้ (x_n) เป็นลำดับโคซีใน A

เนื่องจาก $A \subseteq X$ ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับโคซีใน X ด้วย และเนื่องจาก X เป็น ปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับที่ลู่เข้าใน X สมมติให้มีลิมิตเป็น x

จากบทตั้งที่ 1.16 เราได้ว่า $x \in \bar{A}$ แต่เนื่องจาก A เป็นเซตปิด ดังนั้น $x \in \bar{A} = A$

เพราะฉะนั้น (x_n) เป็นลำดับที่ลู่เข้าใน A นั่นคือ A เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ □

จากสมบัติความบริบูรณ์ของปริภูมิอิงระยะทางที่กล่าวข้างต้น เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทที่สำคัญในการศึกษาทฤษฎีจุดตรึง (Fixed points Theory) ดังจะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1.19 (Banach's contraction mapping theorem)

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ และ $f : X \rightarrow X$ เป็นการส่งแบบหดตัว (contraction) กล่าวคือ มีจำนวนจริง $\alpha \in [0, 1)$ ที่ซึ่ง

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

สำหรับทุกๆ $x, y \in X$ แล้วจะได้ว่ามี $x_0 \in X$ เพียงจุดเดียวที่ซึ่ง $f(x_0) = x_0$

เราเรียกจุด x_0 ที่มีสมบัตินี้ว่าจุดตรึง (fixed point) ของฟังก์ชัน f

บทพิสูจน์ เราจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วนดังนี้

ส่วนที่ 1 (Existence) จะแสดงว่ามี $x_0 \in X$ ที่ซึ่ง $f(x_0) = x_0$

ให้ $x \in X$ จากนั้นนิยามลำดับ (x_n) ใน X นิยามโดย

$$x_{n+1} = f(x_n) \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \dots$$

สังเกตว่า สำหรับ $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
 d(x_{m+1}, x_m) &\leq d(f(x_m), f(x_{m-1})) \\
 &\leq \alpha d(x_m, x_{m-1}) \\
 &= \alpha d(f(x_{m-1}), f(x_{m-2})) \\
 &\leq \alpha^2 d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\
 &\vdots \\
 &\leq \alpha^m d(f(x), x)
 \end{aligned}$$

ดังนั้นโดยอสมการสามเหลี่ยมเราได้ว่า สำหรับ $m, n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n \geq m$

$$\begin{aligned}
 d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\
 &\leq (\alpha^m + \alpha^{m+1} + \cdots + \alpha^{n-1})d(f(x), x) \\
 &= \alpha^m \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} d(f(x), x)
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\alpha \in [0, 1)$ ดังนั้น $1 - \alpha^{n-m} < 1$ เพราะฉะนั้น

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{\alpha^m}{1 - \alpha} d(f(x), x)$$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยหลักอาร์คิมิดีส เราสามารถหา $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n, m \geq N$ เรามีว่า

$$d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$$

นั่นคือ ลำดับ (x_n) เป็นลำดับโคซีในปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ ดังนั้นจึงมีลิมิต เรียกว่า $x_0 \in X$ จากนั้นสังเกตว่า

$$\begin{aligned}
 d(x_0, f(x_0)) &\leq d(x_0, x_m) + d(x_m, f(x_0)) \\
 &\leq d(x_0, x_m) + d(f(x_{m-1}), f(x_0)) \\
 &\leq d(x_0, x_m) + \alpha d(x_{m-1}, x_0)
 \end{aligned}$$

แต่เนื่องจาก $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = x_0$ ดังนั้นเราจะได้ว่า $d(x_0, f(x_0)) = 0$ หรือ $f(x_0) = x_0$ นั่นเอง

ส่วนที่ 2 (Uniqueness) จะแสดงว่ามี $x_0 \in X$ เพียงหนึ่งเดียวที่ซึ่ง $f(x_0) = x_0$

สมมติว่ามี $x_0, y_0 \in X$ ที่ซึ่ง $f(x_0) = x_0$ และ $f(y_0) = y_0$

สังเกตว่า

$$d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \leq \alpha d(x_0, y_0)$$

หรือ $(1 - \alpha)d(x_0, y_0) \leq 0$ ทำให้ได้ว่า $d(x_0, y_0) = 0$ หรือ $x_0 = y_0$ นั่นเอง $\square$

แบบฝึกหัดประจำบทที่ 1

1. ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง นิยาม $d' : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ โดย

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \text{สำหรับ } (x, y) \in X \times X$$
 จงแสดงว่า d' เป็นการวัดระยะทางบน X
2. ให้ A เป็นเซตย่อยใดๆของปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) จงแสดงว่า
 - 2.1 A° คือยูเนียนของเซตเปิดทั้งหมดที่เป็นเซตย่อยของ A
 - 2.2 $\overline{A}$ คืออินเตอร์เซกชันของเซตปิดทั้งหมดที่มี A เป็นเซตย่อย
3. สำหรับเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$ กับการวัดระยะทางแบบปกติ ให้ $B = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
 จงแสดงว่า $\overline{B} = B \cup \{0\}$
4. ให้ A, B, A_α เป็นเซตย่อยของปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) ให้ A' แทนเซตของจุดลิมิตทั้งหมดของ A จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นเท็จจงพิจารณาต่อว่าเซตใดเป็นเซตย่อยของเซตใด
 - 4.1 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
 - 4.2 $\overline{\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}$
 - 4.3 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
 - 4.4 $\overline{\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha} \overline{A_{\alpha}}$
 - 4.5 $(A \cup B)' = A' \cup B'$
 - 4.6 $(A \cap B)' = A' \cap B'$
5. ให้ A เป็นเซตย่อยของปริภูมิอิงระยะทาง (X, d) เรานิยามขอบของเซต A (Boundary of A) ดังนี้

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$$
 จงแสดงว่า A° และ ∂A ไม่มีส่วนร่วมกัน และ $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$
6. ให้ (Y, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ให้ $d : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$\overline{d}(a, b) = \min\{d(a, b), 1\} \quad \text{สำหรับทุก } a, b \in Y$$

แล้วจึงแสดงว่า $\bar{d}$ เป็นการวัดระยะทางบน Y ซึ่งถูกเรียกว่า การวัดระยะทางแบบ
มาตรฐานที่มีขอบเขต

จากนั้นให้ J เป็นเซตใดๆ นิยาม $\rho : Y^J \times Y^J \rightarrow \mathbb{R}$ โดย

$$\rho(f, g) = \sup\{\bar{d}(f(\alpha), g(\alpha)) \mid \alpha \in J\}$$

สำหรับทุกๆ $f, g \in Y^J$ จงแสดงว่า ρ เป็นการวัดระยะทางบน Y^J

7. ให้ (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับโคซีในปริภูมิระยะทาง (X, d) จงแสดงว่า (a_n) เป็น
ลำดับลู่อเข้า เมื่อ นิยาม $a_n = d(x_n, y_n)$

บทที่ 2 ปริภูมิทอพอโลยี

(Topological spaces)

จากบทที่ 1 เราได้เห็นแล้วว่าการวัดระยะทางบนปริภูมิอิงระยะทางเป็นการขยายแนวคิดของการวัดระยะทางบนเซตของจำนวนจริง ซึ่งจากการวัดระยะทางนั้นทำให้เราสามารถนิยามบอลเปิดและเซตเปิด ซึ่งนำไปสู่การสร้างทฤษฎีและสมบัติต่างๆที่สำคัญของปริภูมิอิงระยะทางที่มีความคล้ายคลึงกับเซตของจำนวนจริง

ในบทนี้เราจะนำแนวคิดและสมบัติของเซตเปิดมาสร้างปริภูมิที่ทั่วไปกว่าปริภูมิอิงระยะทาง ซึ่งถูกเรียกว่า ปริภูมิทอพอโลยี ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 ให้ X เป็นเซตใดๆ เราจะกล่าวว่า τ เป็นทอพอโลยีบน เซต X (topology on X) ก็ต่อเมื่อ τ เป็นกลุ่มของเซตย่อยของ X ที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

- T1. $\emptyset$ และ X เป็นสมาชิกของ τ
- T2. ยูเนียนของสมาชิกใดๆใน τ เป็นสมาชิกของ τ
- T3. อินเตอร์เซกชันจำนวนจำกัดของสมาชิกใน τ เป็นสมาชิกของ τ

และเราจะเรียกคู่อันดับ (X, τ) ว่าเป็นปริภูมิทอพอโลยี (topological space) และเรียกสมาชิก $U \in \tau$ ว่าเป็นเซตเปิด (open set) ของ X

ตัวอย่าง 2.1 ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างของปริภูมิทอพอโลยี

- (1) พิจารณา $(\mathbb{R}^n, d_e)$ สำหรับ n ที่เป็นจำนวนนับใดๆ

ให้ $\tau_{\text{usual}} = \{U \mid U \text{ เป็นเซตเปิดใดๆใน } \mathbb{R}^n \text{ ขึ้นกับการวัดระยะทาง } d_e\}$

หรือ $U \in \tau_{\text{usual}}$ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x \in U, \exists r > 0$ ที่ซึ่ง $x \in B_{d_e}(x; r) \subseteq U$

เมื่อ $B_{d_e}(x; r)$ เป็นบอลเปิดซึ่งถูกนิยามผ่านการวัดระยะทาง d_e

จากบทที่ 1 เห็นได้ชัดว่า τ_{usual} สอดคล้องกับเงื่อนไข T1. – T3.

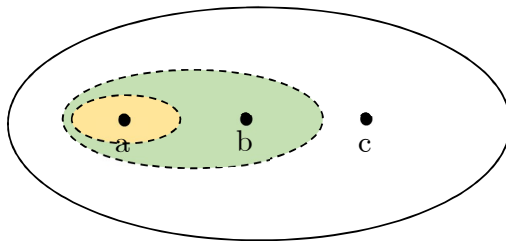
ดังนั้น $(\mathbb{R}^n, \tau_{\text{usual}})$ เป็นปริภูมิทอพอโลยี เรียก τ_{usual} ว่าเป็นทอพอโลยีแบบปกติบน $\mathbb{R}^n$

โดยทั่วไปแล้ว สำหรับปริภูมิอิงระยะทาง (X, d)

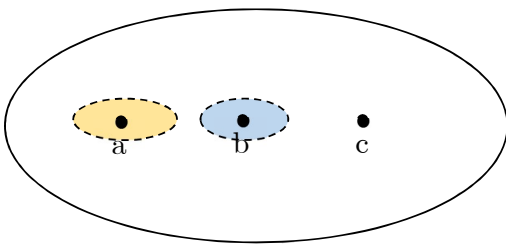
ถ้าเราให้ $\tau_d = \{U \mid U \text{ เป็นเซตเปิดใน } X \text{ ขึ้นกับการวัดระยะทางแบบปกติ } d\}$

เราจะได้ว่า (X, τ_d) เป็นปริภูมิทอพอโลยี และ τ_d ถูกเรียกว่า ทอพอโลยีอิงระยะทาง (metric topology)

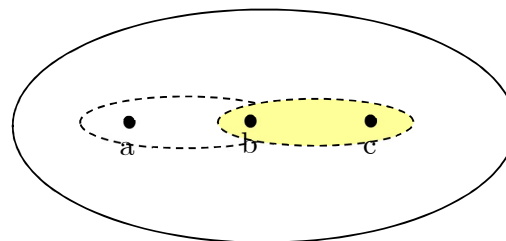
- (2) ให้ X เป็นเซตใดๆ และนิยาม $\tau_{\text{indis}} = \{\emptyset, X\}$ เราจะได้ว่า (X, τ_{indis}) เป็นปริภูมิทอพอโลยี และเรียกปริภูมิดังกล่าวว่า ปริภูมิวิฤต (indiscrete space)
- (3) ให้ X เป็นเซตใดๆ และนิยาม $\tau_{\text{dis}} = P(X)$ เมื่อ $P(X)$ แทนพาวเวอร์เซตของเซต X เราตรวจสอบได้ไม่ยากว่า (X, τ_{dis}) เป็นปริภูมิทอพอโลยี และเรียกปริภูมิดังกล่าวว่า ปริภูมิวิฤต (discrete space)
- (4) ให้ $X = \{a, b, c\}$ และ ให้
- $$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$$
- $$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$$
- $$\tau_3 = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}$$
- เราได้ว่า τ_1 เป็นทอพอโลยีบน X แต่ τ_2 และ τ_3 ไม่ใช่ทอพอโลยีบน X



(X, τ_1) เป็นปริภูมิทอพอโลยี



(X, τ_2) ไม่เป็นปริภูมิทอพอโลยี
เพราะว่า $\{a, b\} = \{a\} \cup \{b\} \notin \tau_2$



(X, τ_3) ไม่เป็นปริภูมิทอพอโลยี
เพราะว่า $\{b\} = \{a, b\} \cap \{b, c\} \notin \tau_3$

จากตัวอย่างนี้เราจะสังเกตเห็นว่าเราสามารถสร้างทอพอโลยีได้หลายแบบบนเซตเดียวกัน

(5) ให้ X เป็นเซตใดๆ และนิยาม $\tau_{\text{cofinite}} = \{\emptyset, A \mid A \subseteq X, X - A \text{ เป็นเซตจำกัด}\}$
 เราสามารถตรวจสอบ(แบบฝึกหัด) ได้ว่า $(X, \tau_{\text{cofinite}})$ เป็นปริภูมิทอพอโลยี
 และเรียก τ_{cofinite} ว่าทอพอโลยีจำกัดร่วม (cofinite topology)

ข้อสังเกต ถ้า X เป็นเซตจำกัดแล้วเราจะได้ว่า $\tau_{\text{cofinite}} = \tau_{\text{dis}}$

จากตัวอย่างข้างต้นทำให้เห็นว่าบนเซตๆเดียวกัน เราสามารถนิยามทอพอโลยีได้หลายแบบ
 ดังนั้นในบางกรณีเราสามารถเปรียบเทียบทอพอโลยีได้ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.2 สมมติให้ τ และ τ' เป็นทอพอโลยีบนเซต X เราจะกล่าวว่า

τ' ละเอียดกว่า (finer than) τ ก็ต่อเมื่อ $\tau \subseteq \tau'$

และ τ' หยาบกว่า (coarser than) τ ก็ต่อเมื่อ $\tau' \subseteq \tau$

ตัวอย่าง 2.2 จากตัวอย่างที่ 2.1 เราจะได้ว่า สำหรับเซตใดๆ $\tau_{\text{indiscrete}} \subseteq \tau_{\text{cofinite}} \subseteq \tau_{\text{discrete}}$
 ดังนั้น τ_{discrete} ละเอียดกว่า τ_{cofinite} และ τ_{cofinite} ละเอียดกว่า $\tau_{\text{indiscrete}}$

ฐานหลักสำหรับทอพอโลยี (basis for a topology)

จากบทที่ 1 เรามีว่าเซตเปิดใดๆเขียนอยู่ในรูปยูเนียนของบอลเปิด ซึ่งสำหรับปริภูมิทอพอโลยี
 เราสามารถนิยามกลุ่มย่อยของทอพอโลยีที่มีพฤติกรรมคล้ายคลึงกับบอลเปิดได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3 ให้ X เป็นเซตใดๆที่ไม่ว่าง เราจะกล่าวว่า $\mathcal{B} \subseteq P(X)$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีบน X (basis for a topology on X) ก็ต่อเมื่อ

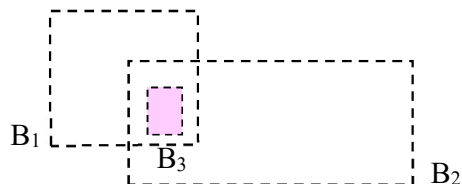
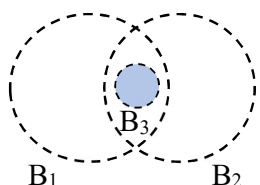
1. $\forall x \in X \exists B \in \mathcal{B}, x \in B$
2. $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 \cap B_2 \Rightarrow \exists B_3 \in \mathcal{B}, x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

ตัวอย่าง 2.3 พิจารณา $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ ให้

$\mathcal{B}_{\text{circle}} =$ เซตของบริเวณภายในของวงกลมเปิดใดๆบน $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{B}_{\text{reg}} =$ เซตของบริเวณภายในของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเปิดใดๆบน $\mathbb{R}^2$

เราจะได้ว่า $\mathcal{B}_{\text{circle}}$ และ $\mathcal{B}_{\text{reg}}$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีบน $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ ดังแสดงได้ด้วยรูปต่อไปนี้



บทนิยาม 2.4 ให้ $\mathcal{A} \subseteq P(X)$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีบน X เรานิยามทอพอโลยีบน X ก่อกำเนิดโดย $\mathcal{A}$ (the topology generated by $\mathcal{A}$) ดังนี้

$$\langle \mathcal{A} \rangle = \{U \subseteq X \mid \forall x \in U \exists B \in \mathcal{A}, x \in B \subseteq U\}$$

การแสดงว่า $\langle \mathcal{A} \rangle$ เป็นทอพอโลยีบน X ขอละไว้ให้ผู้เรียนพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ข้อสังเกต

(1) $\mathcal{A}$ ไม่จำเป็นต้องเป็นทอพอโลยีบน X

จากตัวอย่าง 2.3 เราจะเห็นว่า สำหรับสมาชิกสองตัวใด ๆ ใน $\mathcal{A}_{\text{circle}}$ หรือ $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ ยูเนียนของสมาชิกสองตัวนี้อาจจะไม่ได้เป็นสมาชิกใน $\mathcal{A}_{\text{circle}}$ หรือ $\mathcal{A}_{\text{reg}}$

(2) $\mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{A} \rangle$

ตัวอย่าง 2.4 ให้ X เป็นเซตใด และ ให้ $\mathcal{A}_{\text{dis}} = \{\{x\} \mid x \in X\}$

เราจะได้ว่า สำหรับ $x \in X$, $x \in \{x\} \subseteq X$ และ สำหรับ $x \in \{y\} \cap \{z\}$ เราได้ว่า

$x = y = z$ เพราะฉะนั้น $x \in \{x\} \subseteq \{y\} \cap \{z\} = \{x\}$ นั่นคือ $\mathcal{A}_{\text{dis}}$ เป็นฐานหลักสำหรับทอ

พอโลยีบน X และสังเกตได้ไม่ยากว่า $\langle \mathcal{A}_{\text{dis}} \rangle = \tau_{\text{dis}}$

บทตั้งที่ 2.1 ให้ $\mathcal{A} \neq \emptyset$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีบน X แล้วเราจะได้ว่า

$B \in \langle \mathcal{A} \rangle$ ก็ต่อเมื่อ B เขียนอยู่ในรูปยูเนียนของสมาชิกใน $\mathcal{A}$

บทพิสูจน์

($\Rightarrow$) ให้ $B \in \langle \mathcal{A} \rangle$ ดังนั้นจะได้ว่า สำหรับ $x \in B$ จะมี $B_x \in \mathcal{A}$ ที่ซึ่ง $x \in B_x \subseteq B$

$$\text{ดังนั้น } B = \bigcup_{x \in B} B_x$$

($\Leftarrow$) ให้ $B = \bigcup_{i \in I} B_i$ โดยที่ $B_i \in \mathcal{A}$ ทุกๆ $i \in I$ เมื่อ I เป็นเซตดัชนี

ให้ $x \in B$ ดังนั้นจะมี $i_0 \in I$ ที่ซึ่ง $x \in B_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i = B$

ดังนั้น $B \in \langle \mathcal{A} \rangle$ □

ในการเปรียบเทียบว่าทอพอโลยีที่กำหนดให้สองทอพอโลยีอันไหนละเอียดกว่ากัน ไม่ใช่สิ่งที่ง่ายเนื่องจากจำนวนของเซตเปิดในทอพอโลยีอาจมีจำนวนมหาศาล ทฤษฎีบทถัดไปแสดงให้เห็นถึงวิธีการเปรียบเทียบทอพอโลยีผ่านทางฐานหลักซึ่งมีจำนวนสมาชิกน้อยกว่าเซตเปิด

ทฤษฎีบทที่ 2.2 ให้ $\mathcal{A}$ และ $\mathcal{A}'$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยี $\langle \mathcal{A} \rangle$ และ $\langle \mathcal{A}' \rangle$ บน X ตามลำดับ เราจะได้ว่า
 $\langle \mathcal{A} \rangle \subseteq \langle \mathcal{A}' \rangle$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x \in X \forall B \in \mathcal{A}, x \in B \Rightarrow \exists B' \in \mathcal{A}', x \in B' \subseteq B$

บทพิสูจน์

$(\Rightarrow)$ สมมติให้ $\langle \mathcal{A} \rangle \subseteq \langle \mathcal{A}' \rangle$

ให้ $B \in \mathcal{A}$ และให้ $x \in B \in \mathcal{A} \subseteq \langle \mathcal{A}' \rangle \subseteq \langle \mathcal{A}' \rangle$

ดังนั้นโดยนิยามของ $\langle \mathcal{A}' \rangle$ จะมี $B' \in \mathcal{A}'$ ที่ซึ่ง $x \in B' \subseteq B$

$(\Leftarrow)$ ให้ $U \in \langle \mathcal{A} \rangle$ และ ให้ $x \in U$ ดังนั้นจะมี $B \in \mathcal{A}$ ที่ซึ่ง $x \in B \subseteq U$

โดยสมมติฐาน ได้ว่าจะมี $B' \in \mathcal{A}'$ ที่ซึ่ง $x \in B' \subseteq B \subseteq U$

เพราะฉะนั้น $U \in \langle \mathcal{A}' \rangle$ หรือ $\langle \mathcal{A} \rangle \subseteq \langle \mathcal{A}' \rangle$ □

ทฤษฎีบทที่ 2.3 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิทอพอโลยี และ $\varsigma \subseteq \tau$ ที่ซึ่งมีสมบัติว่า
 ทุกๆ $U \in \tau$ และทุก $x \in U$ จะมี $V \in \varsigma$ ที่ซึ่ง $x \in V \subseteq U$
 แล้ว เราจะได้ว่า ς จะเป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยี τ บน X นั่นคือ $\langle \varsigma \rangle = \tau$

บทพิสูจน์ เริ่มต้นเราจะแสดงว่า ς เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีก่อน

(1) ให้ $x \in X$ เนื่องจาก $x \in X \in \tau$ โดยสมมติฐานจะมี $V \in \varsigma$ ที่ซึ่ง $x \in V \subseteq X$

(2) ให้ $x \in V_1 \cap V_2$ โดยที่ $V_1, V_2 \in \varsigma$

เนื่องจาก $V_1, V_2 \in \varsigma \subseteq \tau$ ดังนั้น $V_1 \cap V_2 \in \tau$ (τ เป็นทอพอโลยี)

ดังนั้นโดยสมมติฐาน จะมี $V_3 \in \varsigma$ ที่ซึ่ง $x \in V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$

นั่นคือ ς เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยี

ต่อไปจะแสดงว่า $\langle \varsigma \rangle = \tau$

$(\subseteq)$ ให้ $V \in \langle \varsigma \rangle$ ดังนั้นโดยบทตั้งที่ 2.1 เราจะได้ว่า

$$V = \bigcup_{i \in I} V_i \text{ โดยที่ } V_i \in \varsigma \text{ ทุกๆ } i \in I \text{ เมื่อ } I \text{ เป็นเซตดัชนี}$$

เนื่องจาก $\varsigma \subseteq \tau$ และ τ เป็นทอพอโลยี ดังนั้น $V = \bigcup_{i \in I} V_i \in \tau$

นั่นคือ $\langle \varsigma \rangle \subseteq \tau$

$(\supseteq)$ ให้ $U \in \tau$ และ $x \in U$ ดังนั้นจะมี $V \in \varsigma$ ที่ซึ่ง $x \in V \subseteq U$

เพราะฉะนั้น $U \in \langle \varsigma \rangle$ โดยนิยามของทอพอโลยีที่ก่อกำเนิดโดย ς นั่นคือ $\tau \subseteq \langle \varsigma \rangle$ □

ทอพอโลยีผลคูณ (the product topology)

สมมติให้ (X, τ_X) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิทอพอโลยี มันเป็นเรื่องธรรมชาติมากที่จะถามถึงทอพอโลยีบนผลคูณคาร์ทีเซียน $X \times Y$ ซึ่งถูกถ่ายทอดมาจาก τ_X และ τ_Y โดยหลักการนิยามทอพอโลยีดังกล่าวมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.5 ให้ (X, τ) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิทอพอโลยี ทอพอโลยีผลคูณบน $X \times Y$ (The product topology on $X \times Y$) ถูกนิยามให้เป็นทอพอโลยีที่มีฐานหลัก $\mathcal{B}_{X \times Y}$ คือเซตซึ่งมีสมาชิกอยู่ในรูป $U \times V$ โดยที่ $U \in \tau_X$ และ $V \in \tau_Y$ นั่นคือ

$$\mathcal{B}_{X \times Y} = \{U \times V \mid U \in \tau_X \text{ และ } V \in \tau_Y\}$$

ในการที่จะตรวจสอบว่า $\mathcal{B}_{X \times Y}$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีทำได้ไม่ยาก โดยอาศัยสมบัติของเซตที่ว่า

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

โดยที่ $U_1, U_2 \in \tau_X$ และ $V_1, V_2 \in \tau_Y$

และสังเกตว่า $\mathcal{B}_{X \times Y}$ ไม่ใช่ทอพอโลยี เนื่องจากสมาชิกสองตัวใดๆของ $\mathcal{B}_{X \times Y}$ ยูเนียนกันแล้ว

อาจจะไม่ได้อยู่ในรูปผลคูณจึงไม่ใช่สมาชิกของ $\mathcal{B}_{X \times Y}$

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ให้ (X, τ) และ (Y, τ_Y) เป็นปริภูมิทอพอโลยี โดยที่มี $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีบน X และ Y ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\mathcal{D} = \{B \times C \mid B \in \mathcal{B} \text{ และ } C \in \mathcal{C}\}$$

เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีผลคูณบน $X \times Y$

บทพิสูจน์ ในการพิสูจน์จะอาศัยทฤษฎีบทที่ 2.3 โดยให้ W เป็นเซตเปิดใน $X \times Y$ และ ให้ $(x, y) \in W$ โดยนิยามของทอพอโลยีผลคูณจะได้ว่า มี $U \in \tau_X$ และ $V \in \tau_Y$ ที่ซึ่ง

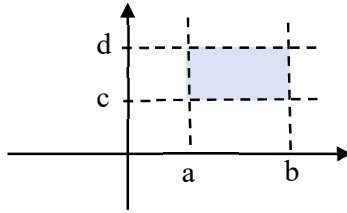
$$(x, y) \in U \times V \subseteq W$$

แต่เนื่องจาก $\mathcal{B}$ และ $\mathcal{C}$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีบน X และ Y จึงได้ว่า มี $B \in \mathcal{B}$ และ $C \in \mathcal{C}$ ที่ซึ่ง

$$x \in B \subseteq U \text{ และ } y \in C \subseteq V \text{ ดังนั้น } (x, y) \in B \times C \subseteq U \times V \subseteq W$$

เพราะฉะนั้น $\mathcal{D}$ คือ ฐานหลักสำหรับทอพอโลยีผลคูณบน $X \times Y$ □

ตัวอย่าง 2.5 พิจารณา $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ เราจะได้ว่า ทอพอโลยีผลคูณบน $\mathbb{R}^2$ จะมีสมาชิกของฐานหลักมีหน้าตาเป็นผลคูณของช่วงเปิด $(a, b) \times (c, d)$ ซึ่งคือบริเวณภายในของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนระนาบ XY ดังรูปต่อไปนี้



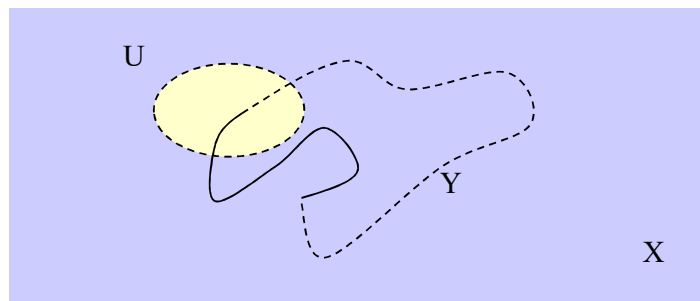
ปริภูมิทอพอโลยีย่อย (the subspace topology)

ในการทำงานเกี่ยวกับปริภูมิอิงระยะทางที่เราสามารถพิจารณาทุกๆเซตย่อยของปริภูมิอิงระยะทางเป็นปริภูมิอิงระยะทาง ผ่านการวัดระยะทางที่จำกัดโดเมนลงบนเซตย่อย สำหรับปริภูมิทอพอโลยี เราสามารถนิยามปริภูมิทอพอโลยีย่อยได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.6 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิทอพอโลยีและ $Y \subseteq X$ แล้วเราจะได้ว่า

$$\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$$

เป็นทอพอโลยีบน Y และเรียกทอพอโลยีดังกล่าวว่า ทอพอโลยีย่อย (subspace topology) ของ Y ที่ถูกถ่ายทอดจาก(inherited from) X และเราจะเรียก (Y, τ_Y) ว่าเป็นปริภูมิทอพอโลยีย่อยของ (X, τ)



ทฤษฎีบทที่ 2.5 ให้ $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิทอพอโลยี (X, τ) และ ให้ $Y \subseteq X$ แล้วเราจะได้ว่า

$$\mathcal{B}_Y = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$$

เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีย่อยของ Y

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดว่า $\mathcal{B}_Y \subseteq \tau_Y$ เพราะว่า $\mathcal{B} \subseteq \tau$

ให้ $V \in \tau_Y$ และ $x \in V$ แล้วเราได้ว่า $x \in V = U \cap Y$ สำหรับบาง $U \in \tau$

เนื่องจาก $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักของปริภูมิทอพอโลยี (X, τ) ดังนั้นจะมี $B_x \in \mathcal{B}$ ที่ซึ่ง $x \in B_x \subseteq U$

หรือ $x \in B_x \cap Y \subseteq U \cap Y = V$

เพราะฉะนั้น $\mathcal{A}_Y$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีย่อยของ Y □

ตัวอย่าง 2.6 จากตัวอย่าง 2.4 ก่อนหน้านี้เราได้ว่า $\mathcal{A}_{\text{dis}} = \{\{x\} \mid x \in X\}$ เป็นฐานหลักของ $\tau_{\text{dis}} = P(X)$ บนเซต X ใดๆ ถ้าเราให้ $Y \subseteq X$ เราจะได้ว่า

$$\mathcal{A}_{\text{dis}}(Y) = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{A}_{\text{dis}}\} = \{\{y\} \mid y \in Y\}$$

เป็นฐานหลักของ Y ซึ่งก่อกำเนิดทอพอโลยีย่อย $\tau_{\text{dis}}(Y) = P(Y)$ ของ Y

ทฤษฎีบทที่ 2.6 ให้ Y เป็นปริภูมิทอพอโลยีย่อยของ (X, τ) ถ้า U เป็นเซตเปิดใน Y และ Y เป็นเซตเปิดใน X แล้ว U เป็นเซตเปิดใน X ด้วย

บทพิสูจน์ เนื่องจาก U เป็นเซตเปิดใน Y ภายใต้ทอพอโลยีย่อย ดังนั้น $U = V \cap Y$ โดยที่

$$V \in \tau$$

และเนื่องจาก Y เป็นเซตเปิดใน X ด้วย ดังนั้น $U = V \cap Y$ เป็นเซตเปิดใน X □

ตัวอย่าง 2.7 พิจารณา $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ และให้ $Y = [0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ และ $U = [0, \frac{1}{2})$ จะได้ว่า U เป็นเซตเปิดใน Y เนื่องจาก $U = [0, \frac{1}{2}) = (-1, \frac{1}{2}) \cap [0, 1)$ แต่เนื่องจาก Y ไม่ได้เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}$ ดังนั้นเราจึงไม่สามารถได้ข้อสรุปตามทฤษฎีบทที่ 2.6 ในความเป็นจริง U ไม่เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}$

โดยทั่วไปแล้ว เรากล่าวได้ว่าเซตเปิดในเซตใหญ่จะเป็นเซตเปิดในเซตเล็กด้วย แต่เซตเปิดในเซตเล็กไม่จำเป็นต้องเป็นเซตเปิดในเซตที่ใหญ่กว่า

เซตปิด (closed sets)

บทนิยาม 2.7 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิทอพอโลยีและ $C \subseteq X$ เราจะกล่าวว่า C เป็นเซตปิด (closed set) ใน X ก็ต่อเมื่อ $X - C \in \tau$ หรือ $X - C$ เป็นเซตเปิดนั่นเอง

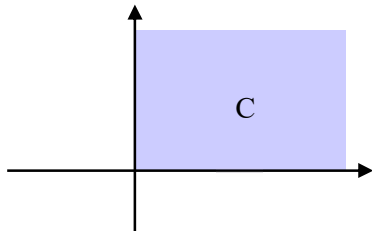
ตัวอย่าง 2.8

(1) พิจารณา $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ เราจะได้ว่า ช่วงปิด $[a, b]$ ใดๆเป็นเซตปิด เพราะว่า

$$\mathbb{R} - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \in \tau_{\text{usual}}$$

(2) พิจารณา $(\mathbb{R}^2, \tau_{\text{usual}})$ ให้ $C = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\}$

เราจะได้ว่า C เป็นเซตปิด เนื่องจาก $\mathbb{R}^2 - C = [(-\infty, 0) \times \mathbb{R}] \cup [\mathbb{R} \times (-\infty, 0)] \in \tau_{\text{usual}}$



(3) พิจารณา $(X, \tau_{\text{cofinite}})$ และ $C \subseteq X$ เราได้ว่า C เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ C เป็นเซตจำกัด

(4) พิจารณา $(X, \tau_{\text{discrete}}) = (X, P(X))$ เราได้ว่า ทุกๆ เซตย่อยของ X เป็นเซตปิด

ทฤษฎีบทที่ 2.7 ให้ (X, τ) เป็นปริภูมิทอพอโลยี ได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริง

- (1) $\emptyset, X$ เป็นเซตปิด
- (2) ทุกๆ อินเตอร์เซกชันของเซตปิดเป็นเซตปิด
(Any arbitrary intersections of closed sets are closed)
- (3) ทุกๆ ยูเนียนจำนวนจำกัดของเซตปิดเป็นเซตปิด
(Any finite unions of closed sets are closed)

พิสูจน์

(1) เนื่องจาก $X - \emptyset = X \in \tau$ และ $X - X = \emptyset \in \tau$
ดังนั้น $\emptyset, X$ เป็นเซตปิด

(2) ให้ $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นกลุ่มของเซตปิดใดๆ เมื่อ I เป็นเซตดัชนี
ดังนั้น $X - C_\alpha \in \tau$ สำหรับทุกๆ $\alpha \in I$
เนื่องจาก τ เป็นทอพอโลยีบน X ดังนั้น

$$X - \bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (X - C_\alpha) \in \tau \quad (\text{กฎของ De Morgan})$$

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ เป็นเซตปิด

(3) ให้ $\{C_i\}_{i=1}^n$ เป็นกลุ่มจำกัดของเซตปิดใดๆ

ดังนั้น $X - C_i \in \tau$ สำหรับทุกๆ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

เนื่องจาก τ เป็นทอพอโลยีบน X ดังนั้น

$$X - \bigcup_{i=1}^n C_i = \bigcap_{i=1}^n (X - C_i) \in \tau \quad (\text{กฎของ De Morgan})$$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{i=1}^n C_i$ เป็นเซตปิด

□

ทฤษฎีบทที่ 2.8 ให้ Y เป็นปริภูมิทอพอโลยีย่อยของ (X, τ) และ $A \subseteq Y$ ได้ว่า A เป็นเซตปิดใน Y ก็ต่อเมื่อ $A = C \cap Y$ สำหรับบางเซตปิด C ใน X

บทพิสูจน์

($\Rightarrow$) สมมติให้ A เป็นเซตปิดใน Y ดังนั้น $Y - A \in \tau_Y$ หรือ

$Y - A = U \cap Y$ สำหรับบางเซตเปิด U ใน X

สังเกตว่า $(X - U) \cap Y = (X \cap Y) - (U \cap Y) = Y - (Y - A) = A$

เพราะฉะนั้น $A = C \cap Y$ โดยที่ $C = X - U$ เป็นเซตปิดใน X

($\Leftarrow$) สมมติให้ $A = C \cap Y$ สำหรับบางเซตปิด C ใน X

เนื่องจาก C เป็นเซตปิดใน X ดังนั้น $X - C$ เป็นเซตเปิดใน X และเรามีว่า

$$(X - C) \cap Y = (X \cap Y) - (C \cap Y) = Y - A$$

ดังนั้น $Y - A \in \tau_Y$ หรือ A เป็นเซตปิดใน Y นั่นเอง

□

บทแทรกที่ 2.9 ให้ Y เป็นปริภูมิทอพอโลยีย่อยของ (X, τ) ถ้า A เป็นเซตปิดใน Y และ Y เป็นเซตปิดใน X แล้ว A เป็นเซตปิดใน X ด้วย

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 2.8 เราจะได้ว่า $A = C \cap Y$ สำหรับบางเซตปิด C ใน X

เนื่องจาก Y เป็นเซตปิดใน X ดังนั้น $A = C \cap Y$ เป็นเซตปิดใน X ด้วย

□

ส่วนปิดคลุมและส่วนภายในของเซต (closure and interior of sets)

ในหัวข้อนี้จะทำการนิยามและศึกษาส่วนปิดคลุมและส่วนภายในของเซตย่อยบนปริภูมิทอพอโลยีดังต่อไปนี้

บทนิยาม 2.8 ให้ A เป็นเซตย่อยของปริภูมิทอพอโลยี (X, τ) นิยามส่วนภายในของเซต A (interior of A) ดังนี้

$$\text{Int}(A) = A^\circ = \text{ยูเนียนของเซตเปิดทั้งหมดที่เป็นเซตย่อยของ } A$$

และนิยามส่วนปิดคลุมของเซต A (closure of A) ดังนี้

$$\text{Cl}(A) = \bar{A} = \text{อินเตอร์เซกชันของเซตปิดทั้งหมดที่คลุม } A$$

ข้อสังเกต 1. A° เป็นเซตเปิด และ $\bar{A}$ เป็นเซตปิด

$$2. A^\circ \subseteq A \subseteq \bar{A}$$

$$3. A \text{ เป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อ } A = A^\circ$$

$$4. A \text{ เป็นเซตปิด ก็ต่อเมื่อ } A = \bar{A}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.10 ให้ Y เป็นปริภูมิทอพอโลยีย่อยของ (X, τ) และ $A \subseteq Y$ แทนสัญลักษณ์ $\bar{A} =$ ส่วนปิดคลุมของเซต A ใน X และ $\bar{A}_Y =$ ส่วนปิดคลุมของเซต A ใน Y แล้วได้ว่า $\bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก $\bar{A}_Y$ เป็นเซตปิดใน Y ดังนั้น $\bar{A}_Y = C \cap Y$ สำหรับบางเซตปิด C ใน X และได้ว่า $A \subseteq \bar{A}_Y = C \cap Y \subseteq C$

โดยนิยามของส่วนปิดคลุมของ A ใน X จะได้ว่า $\bar{A} \subseteq C$ เพราะฉะนั้น $\bar{A} \cap Y \subseteq C \cap Y = \bar{A}_Y$ ในทางกลับกัน เนื่องจาก $\bar{A}$ เป็นเซตปิดใน X ดังนั้น $\bar{A} \cap Y$ จึงเป็นเซตปิดใน Y ซึ่ง

$$A \subseteq \bar{A} \cap Y$$

โดยนิยามของส่วนปิดคลุมของ A ใน Y เราได้ว่า $\bar{A}_Y \subseteq \bar{A} \cap Y$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y \quad \square$$

ทฤษฎีบทที่ 2.11 ให้ A เป็นเซตย่อยของปริภูมิทอพอโลยี (X, τ) แล้วจะได้ว่า

$$x \in \bar{A} \text{ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆเซตเปิด } U \text{ ที่คลุม } x \text{ ได้ว่า } U \cap A \neq \emptyset$$

บทพิสูจน์ เราจะทำการพิสูจน์ข้อความที่สมมูลกับข้อความข้างต้นดังนี้

$$x \notin \bar{A} \Leftrightarrow \text{มีบางเซตเปิด } U \text{ ที่คลุม } x \text{ แต่ } U \cap A = \emptyset$$

$$(\Rightarrow) \text{ ให้ } x \notin \bar{A} \text{ ดังนั้น } x \in X - \bar{A}$$

เนื่องจาก $\bar{A}$ เป็นเซตปิด ดังนั้น $U = X - \bar{A}$ เป็นเซตเปิดที่คลุม x

$$\text{และยังได้อีกว่า } U \cap A = (X - \bar{A}) \cap A = \emptyset \text{ เพราะว่า } A \subseteq \bar{A}$$

$$(\Rightarrow) \text{ สมมติให้ } x \in X \text{ และมีเซตเปิด } U \text{ ที่คลุม } x \text{ แต่ } U \cap A = \emptyset$$

สมมติ $x \in \bar{A}$

เนื่องจาก U เป็นเซตเปิด และ $U \cap A = \emptyset$ ดังนั้น $X - U$ เป็นเซตปิดที่ซึ่ง $A \subseteq X - U$

โดยนิยามของส่วนปิดคลุมของ A ใน X ได้ว่า $\bar{A} \subseteq X - U$

เพราะฉะนั้น $x \in X - U$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ U เป็นเซตเปิดที่คลุม x

ดังนั้น $x \notin \bar{A}$

□

แบบฝึกหัดประจำบทที่ 2

1. ให้ X เป็นปริภูมิทอพอโลยี และ A เป็นเซตย่อยของ X สมมติว่าแต่ละ $x \in A$ จะมีเซตเปิด U ที่ซึ่ง $x \in U \subseteq A$ จงแสดงว่า A เป็นเซตเปิด
2. ให้ $\{\tau_\alpha\}$ เป็นกลุ่มของทอพอโลยีบนเซต X จงแสดงว่า $\bigcap \tau_\alpha$ เป็นทอพอโลยีบน X จากนั้นลองพิจารณาว่า $\bigcup \tau_\alpha$ เป็นทอพอโลยีบน X หรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ
3. ให้ $X = \{a, b, c\}$ และ
 $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ และ $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{c\}, \{b, c\}\}$
 จงหาทอพอโลยีที่เล็กที่สุด และใหญ่ที่สุดที่คลุม τ_1 และ τ_2
4. จงแสดงว่า ถ้า U เป็นเซตเปิดใน X และ A เป็นเซตปิดใน X แล้ว $U - A$ เป็นเซตเปิดใน X และ $A - U$ เป็นเซตปิดใน X
5. ให้ S เป็นเซตย่อยของปริภูมิทอพอโลยี X จงแสดงว่า
 5.1 $\overline{X - S} = X - S^\circ$
 5.2 $(X - S)^\circ = X - \overline{S}$
6. ให้ X เป็นปริภูมิทอพอโลยี ถ้า Y เป็นปริภูมิทอพอโลยีย่อยของ X และ $A \subseteq Y$ แล้วจงแสดงว่า ทอพอโลยีย่อยของ A ที่ถูกถ่ายทอดจาก Y คือสิ่งเดียวกับทอพอโลยีย่อยของ A ที่ถูกถ่ายทอดจาก X
7. จงแสดงว่ากลุ่มนับได้

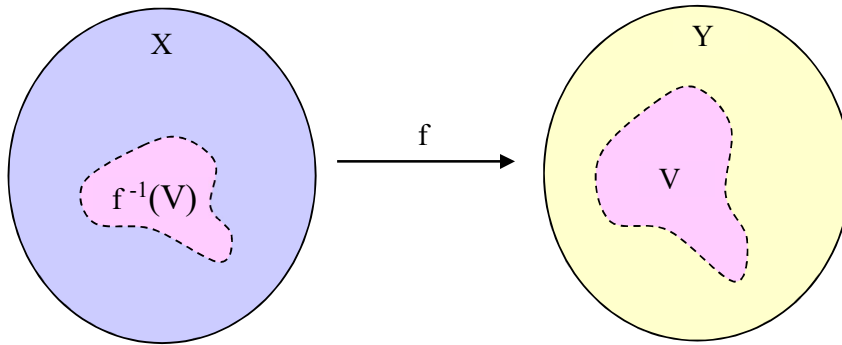
$$\{(a, b) \times (c, d) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$$
 เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีบน $\mathbb{R}^2$

บทที่ 3 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

(Continuity of functions)

แนวคิดเรื่องฟังก์ชันต่อเนื่อง เป็นที่รู้จักกันอย่างแพร่หลายในวิชาคณิตศาสตร์ ฟังก์ชันต่อเนื่องแรกๆที่เราได้ทำการศึกษา ก็คงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องระหว่างเซตของจำนวนจริงซึ่งถูกพูดถึงในวิชาแคลคูลัส ในบทนี้เราจะทำการนิยามและศึกษาสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่องระหว่างปริภูมิทอพอโลยี ดังจะกล่าวต่อไปนี้

บทนิยาม 3.1 ให้ $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ เป็นปริภูมิทอพอโลยี และ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชัน เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) ก็ต่อเมื่อ
ทุกเซตเปิด V ใดๆใน Y จะได้ว่า $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน X ($V \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_X$)



ตัวอย่าง 3.1 ให้ $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องระหว่างปริภูมิอิงระยะทาง เนื่องจากทุกปริภูมิอิงระยะทางเป็นปริภูมิทอพอโลยี ดังนั้นจากนิยามข้างต้นเราจะได้ว่า ทุกๆ $x \in X$ และ $\varepsilon > 0$ จะได้ว่า $B(f(x); \varepsilon)$ เป็นเซตเปิดใน Y เพราะฉะนั้น $f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$ เป็นเซตเปิดใน X และ $x \in f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$ เพราะฉะนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $x \in B(x; \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$ หรือก็คือ สำหรับทุก $y \in X$

$$d_X(x, y) < \delta \rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

เงื่อนไขข้างต้นเรียกว่า เงื่อนไขการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในเทอมของ $\varepsilon - \delta$

ตัวอย่าง 3.2 ให้ $\mathbb{R}_\ell$ แทนเซตของจำนวนจริงที่นิยามทอพอโลยีด้วยฐานหลัก

$$\mathcal{B}_\ell = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

เราเรียกทอพอโลยีที่ก่อกำเนิดด้วยฐานหลักข้างต้นว่าทอพอโลยีลิมิตล่าง (lower limit topology)

ให้ $\text{id}_1 : \mathbb{R}_\ell \rightarrow \mathbb{R}$ และ $\text{id}_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_\ell$ เป็นการส่งเอกลักษณ์(identity map) นิยามโดย

$$\text{id}_1(x) = x = \text{id}_2(x) \text{ สำหรับ } x \in \mathbb{R}$$

สังเกตว่าช่วงเปิด (a, b) เป็นเซตเปิดทั้งใน $\mathbb{R}$ และ $\mathbb{R}_\ell$ แต่ ช่วง $(a, b]$ เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{R}_\ell$ แต่ไม่เปิดใน $\mathbb{R}$ ดังนั้นเราเลยได้ว่า id_1 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ id_2 ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

จากตัวอย่างดังกล่าวนี้เราจะเห็นว่าปัจจัยหนึ่งที่สำคัญที่มีผลต่อความต่อเนื่องของฟังก์ชันก็คือทอพอโลยีบนเซตนั่นเอง

โดยทั่วไปในการแสดงว่าฟังก์ชันใด ๆ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องไม่ใช่เรื่องที่ยาก ทฤษฎีบทต่อไปนี้เสนอแนวทางที่สมมูลในการตรวจสอบการเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องโดยมีรายละเอียดดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ให้ $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ เป็นปริภูมิทอพอโลยี และ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชัน แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (1) f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
- (2) สำหรับเซตย่อย A ใดๆของ X ได้ว่า $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$
- (3) สำหรับเซตปิด B ใดๆใน Y ได้ว่า $f^{-1}(B)$ เป็นเซตปิดใน X

บทพิสูจน์

(1 $\Rightarrow$ 2) สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ $y \in f(\bar{A})$ ดังนั้นจะมี $x \in \bar{A}$ ที่ซึ่ง $f(x) = y$

ให้ V เป็นเซตเปิดใดๆที่คลุม $y = f(x)$ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิด และ $x \in f^{-1}(V)$ และจาก $x \in \bar{A}$ เราจึงได้ว่า $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset$

เพราะฉะนั้น ให้ $z \in f^{-1}(V) \cap A$ จะได้ว่า $f(z) \in V \cap f(A)$ นั่นคือ $V \cap f(A) \neq \emptyset$

ดังนั้น $y \in \overline{f(A)}$

(2 $\Rightarrow$ 3) สมมติ สำหรับเซตย่อย A ใดๆของ X ได้ว่า $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

ให้ B เป็นเซตปิดใดๆใน Y ต้องการแสดงว่า $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$

ให้ $x \in \overline{f^{-1}(B)}$ ดังนั้น $f(x) \in \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \bar{B} = B$

เพราะฉะนั้น $x \in f^{-1}(B)$ นั่นคือ $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B)$

(3 $\Rightarrow$ 1) สมมติ สำหรับเซตปิด B ใดๆใน Y ได้ว่า $f^{-1}(B)$ เป็นเซตปิดใน X

ให้ V เป็นเซตเปิดใดๆใน Y ได้ว่า $Y - V$ เป็นเซตปิดใน Y

โดยสมมติฐานจะได้ว่า $f^{-1}(Y - V) = f^{-1}(Y) - f^{-1}(V) = X - f^{-1}(V)$ เป็นเซตปิดใน X

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(V) = X - (X - f^{-1}(V))$ เป็นเซตเปิดใน X นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $\square$

บทนิยาม 3.2 ให้ $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ เป็นปริภูมิทอพอโลยี และ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชัน

เรากล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันสมานสัณฐาน (homeomorphism) ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบ 1-1 ทั้งถึง และ
2. f^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 3.2 เราจะเห็นว่าสมบัติข้อ 1 ไม่ได้ส่งผลให้ได้สมบัติข้อ 2 ในนิยามข้างต้น

บทนิยาม 3.3 ให้ $(X, \tau_X), (Y, \tau_Y)$ เป็นปริภูมิทอพอโลยี เราจะกล่าวว่า ปริภูมิ X และ Y สมานสัณฐานกัน (X is homeomorphic to Y) ให้สัญลักษณ์แทนด้วย $X \cong Y$ ถ้ามีเป็นฟังก์ชันสมานสัณฐาน $f : X \rightarrow Y$

ข้อสังเกต ความสัมพันธ์ $\cong$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล (equivalence relation) บนกลุ่มของปริภูมิทอพอโลยีทั้งหมด (แบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง 3.3

1. ให้ $f : (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ นิยามโดย $f(x) = 3x + 1$

เราตรวจสอบได้ไม่ยากว่า f เป็นฟังก์ชันสมานสัณฐาน โดยมี f^{-1} นิยามโดย $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

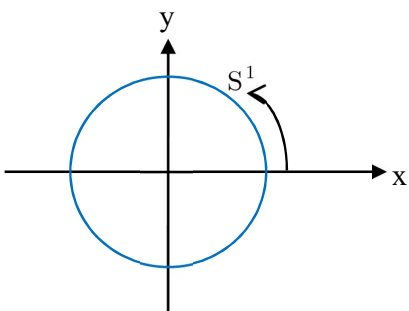
2. ให้ $g : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $g(x) = \frac{x}{1-x^2}$

เราตรวจสอบได้ไม่ยากเช่นเดียวกันว่า g เป็นฟังก์ชันสมานสัณฐาน (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)

3. กำหนดให้ $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$

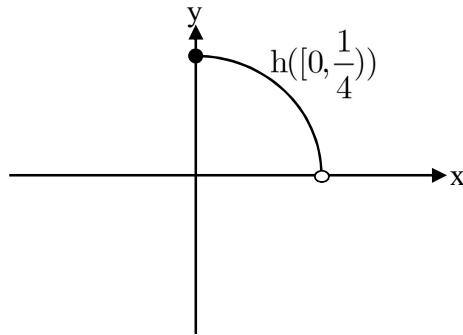
เรียก S^n ว่าเป็นทรงกลมมิติ n (sphere of dimension n)

ให้ $h : [0, 1) \rightarrow S^1$ นิยามโดย $h(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$



เราจะเห็นได้ชัดว่า h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบ 1-1 และ ทัวถึง

พิจารณา $U = [0, \frac{1}{4})$ เป็นเซตเปิดใน $[0, 1)$ แต่ $h([0, \frac{1}{4}))$ ไม่ใช่เซตเปิดใน S^1



ดังนั้น h^{-1} จึงไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ในการสร้างฟังก์ชันต่อเนื่องจากปริภูมิทอพอโลยีหนึ่งไปยังอีกทอพอโลยีหนึ่งไม่ใช่เรื่องง่าย ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงให้เห็นว่าโดยทั่วไปฟังก์ชันแบบใดบ้างที่เราสามารถสรุปได้ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบทที่ 3.2

(กฎการสร้างฟังก์ชันต่อเนื่อง : Rule for constructing continuous functions)

ให้ X, Y, Z เป็นปริภูมิทอพอโลยี

1. ฟังก์ชันคงตัว (Constant function): ฟังก์ชันคงตัว $f : X \rightarrow Y$ นิยามโดย $f(x) = y_0$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เมื่อ y_0 เป็นจุดตรึง(fixed point) ใน Y
2. ฟังก์ชันส่งเข้า (Inclusion): ให้ $A \subseteq X$ และ $i : A \rightarrow X$ นิยามโดย $i(x) = x$ สำหรับทุก $x \in A$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
3. ฟังก์ชันประกอบ (Composition): ให้ $f : X \rightarrow Y$ และ $g : Y \rightarrow Z$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง จะได้ว่าฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
4. การจำกัดโดเมน (Domain restriction) : ให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $A \subseteq X$ แล้วเราจะได้ว่าฟังก์ชันจำกัด $f|_A : A \rightarrow Y$ นิยามโดย $f|_A(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in A$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
5. การจำกัดเรนจ์ (Range restriction): ให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า $Z \subseteq Y$ ที่ซึ่ง $f(X) \subseteq Z$ แล้วจะได้ว่า $g : X \rightarrow Z$ นิยามโดย $g(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง
6. การขยายเรนจ์ (Range expansion) : ให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า $Y \subseteq Z$ แล้วจะได้ว่า $g : X \rightarrow Z$ นิยามโดย $g(x) = f(x)$ สำหรับทุก $x \in X$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

7. การก่อดัวของความต่อเนื่องเฉพาะที่ (Local formulation of continuity) : ให้

$f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชัน ถ้า $X = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ โดยที่ I เป็นเซตดัชนี และ U_α เป็นเซตเปิด

สำหรับทุกๆ $\alpha \in I$ สมมติให้ $f|_{U_\alpha}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

8. ความต่อเนื่องที่แต่ละจุด (Continuous at each point): สำหรับ $x \in X$ และแต่ละเซตเปิด $V \subseteq Y$ ที่ซึ่ง $f(x) \in V$ ถ้าเรามี เซตเปิด $U \subseteq X$ ที่ซึ่ง $f(U) \subseteq V$ แล้วเราจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

บทพิสูจน์

1. ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y

ถ้า $y_0 \notin V$ แล้วจะได้ว่า $f^{-1}(V) = \emptyset$ ซึ่งเป็นเซตเปิดใน X

ถ้า $y_0 \in V$ แล้วจะได้ว่า $f^{-1}(V) = X$ ซึ่งเป็นเซตเปิดใน X

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

2. ให้ V เป็นเซตเปิดใน X จะได้ว่า

$i^{-1}(V) = V \cap A$ ซึ่งเป็นเซตเปิดใน A ตามนิยามของทอพอโลยีย่อย

ดังนั้น i เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

3. ให้ $f : X \rightarrow Y$ และ $g : Y \rightarrow Z$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และให้ V เป็นเซตเปิดใน Z

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจะได้ว่า $g^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน Y

และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องจะได้ว่า $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ เป็นเซตเปิดใน X นั่นคือ $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

4. สังเกตว่า $f|_A = f \circ i_A$ โดยที่ $i_A : A \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันส่งเข้า โดยข้อ 2-3 เราได้ว่า $f|_A$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

5. ให้ W เป็นเซตเปิดใน Z จะได้ว่า $W = V \cap Z$ โดยที่ V เป็นเซตเปิดใน Y

และได้ว่า $g^{-1}(W) = g^{-1}(V \cap Z) = f^{-1}(V)$ ซึ่งเป็นเซตเปิดใน X เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

6. สังเกตว่า $g = i_Y \circ f$ โดยที่ $i_Y : Y \rightarrow Z$ เป็นฟังก์ชันส่งเข้า โดยข้อ 2-3 เราได้ว่า g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

7. ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y จะได้ว่า $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in I} f_{|U_\alpha}^{-1}(V)$

เนื่องจาก $f_{|U_\alpha}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นได้ว่า $f_{|U_\alpha}^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน U_α สำหรับทุก

$\alpha \in I$ และจาก U_α เป็นเซตเปิดใน X ดังนั้น $f_{|U_\alpha}^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน X ด้วย

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(V) = \bigcup_{\alpha \in I} f_{|U_\alpha}^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน X นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

8. ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y และให้ $x \in f^{-1}(V)$ ดังนั้น $f(x) \in V$

โดยสมมติฐาน ได้ว่า จะมีเซตเปิด U ใน X ที่ซึ่ง $x \in U$ และ $f(U) \subseteq V$ ดังนั้น

$$x \in U \subseteq f^{-1}(f(U)) \subseteq f^{-1}(V)$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน X □

บทตั้งที่ 3.3 (บทตั้งของการแปะ : The pasting lemma)

ให้ $X = A \cup B$ โดยที่ A และ B เป็นเซตปิดใน X ให้ $f : A \rightarrow Y$ และ $g : B \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ซึ่ง $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก $x \in A \cap B$ นิยามฟังก์ชัน $h : X \rightarrow Y$ โดย

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x \in A \\ g(x) & , \quad x \in B \end{cases}$$

แล้ว h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

บทพิสูจน์

ให้ C เป็นเซตเปิดใดๆใน Y แล้วเราได้ว่า $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$

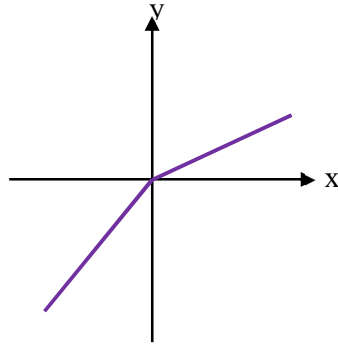
เนื่องจาก f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น $f^{-1}(C)$ และ $g^{-1}(C)$ เป็นเซตเปิดใน A และ B ตามลำดับ

และเนื่องจาก A และ B เป็นเซตปิดใน X ดังนั้น $f^{-1}(C)$ และ $g^{-1}(C)$ เป็นเซตปิดใน X ด้วย

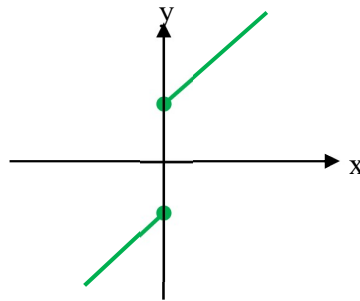
เพราะฉะนั้น $h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$ เป็นเซตเปิดใน X นั่นคือ h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง □

ตัวอย่าง 3.4 กำหนดฟังก์ชัน $h, k, \ell : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามดังต่อไปนี้

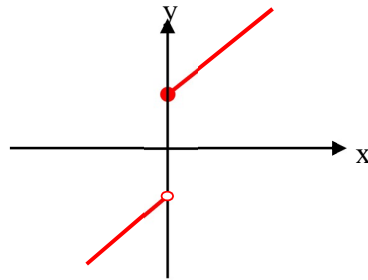
$$h(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ x/2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$



$$k(x) = \begin{cases} x - 2 & , \quad x \leq 0 \\ x + 2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$



$$\ell(x) = \begin{cases} x - 2 & , \quad x < 0 \\ x + 2 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$



จากตัวอย่างของฟังก์ชันข้างต้นจะเห็นว่า ฟังก์ชัน h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เนื่องจากสอดคล้องตามทฤษฎีบทข้างต้นทุกประการ ส่วนฟังก์ชัน k ไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่อง เนื่องจาก $x - 2 \neq x + 2$ ที่ $x = 0$ ดังนั้นทฤษฎีบทจึงไม่ได้รับการันตีความต่อเนื่อง

ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชัน ℓ ไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่องจาก $A = \{x \mid x < 0\} = (-\infty, 0)$ ไม่ใช่เซตปิด ใน $\mathbb{R}$ ดังนั้นทฤษฎีบทจึงไม่ได้รับการันตีความต่อเนื่อง

ทฤษฎีบทที่ 3.4 ให้ $f: A \rightarrow X \times Y$ นิยามโดย $f(a) = (f_1(a), f_2(a))$ สำหรับทุก $a \in A$ เราจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ $f_1: A \rightarrow X$ และ $f_2: A \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

บทพิสูจน์

($\Rightarrow$) สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ให้ $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ และ $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ นิยามโดย $\pi_1(x, y) = x$ และ $\pi_2(x, y) = y$ สำหรับทุก $x \in X, y \in Y$

สังเกตว่า สำหรับเซตเปิด $U \subseteq X$ และ $V \subseteq Y$ เราได้ว่า $\pi_1^{-1}(U) = U \times Y$ และ

$\pi_2^{-1}(V) = X \times V$ ซึ่งเป็นเซตเปิดใน $X \times Y$ ดังนั้น π_1 และ π_2 จึงเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และได้
อีกว่า $f_1(a) = \pi_1(f(a))$ และ $f_2(a) = \pi_2(f(a))$ ทุก $a \in A$

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 3.2 จึงได้ว่า $f_1: A \rightarrow X$ และ $f_2: A \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

($\Leftarrow$) สมมติให้ $f_1: A \rightarrow X$ และ $f_2: A \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ $U \times V \subseteq X \times Y$ เป็นสมาชิกของฐานหลักสำหรับทอพอโลยีผลคูณบน $X \times Y$

จะได้ว่า U และ V เป็นเซตเปิดใน X และ Y ตามลำดับ ดังนั้น $f_1^{-1}(U)$ และ $f_2^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน A แต่เนื่องจาก $f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$ เพราะฉะนั้น $f^{-1}(U \times V)$ จึงเป็นเซตเปิดใน A นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องนั่นเอง $\square$

ความต่อเนื่องระหว่างปริภูมิอิงระยะทาง (continuity between metric spaces)

เนื่องจากเราสามารถพิจารณาปริภูมิอิงระยะทางให้เป็นปริภูมิทอพอโลยีตามที่เคยกล่าวไว้แล้วในหัวข้อก่อนหน้านี้ ในหัวข้อนี้จะทำการศึกษาความต่อเนื่องระหว่างปริภูมิอิงระยะทาง โดยก่อนอื่นจะขออนุญาตนิยามความต่อเนื่องรายจุดก่อนดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3 ให้ (X, d_X) และ (Y, d_Y) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $f: X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันใดๆ เราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) ที่ $x_0 \in X$ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ โดยที่สำหรับ $x \in X$ ที่ซึ่ง

$$d_X(x, x_0) < \delta \text{ เราจะได้ว่า } d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

$$[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in X, d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon]$$

และเราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกๆ จุดใน X

ทฤษฎีบทถัดไปจะแสดงให้เห็นถึงความสมมูลระหว่างบทนิยาม 3.3 และบทนิยาม 3.1 ดังจะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3.5 ให้ (X, d_X) และ (Y, d_Y) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง และ $f: X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชัน

ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง (บทนิยาม 3.3)
2. สำหรับ $x \in X$ และสำหรับลำดับ (x_n) ที่ลู่เข้าสู่ x เราจะได้ว่า ลำดับ $(f(x_n))$ จะลู่เข้าสู่ $f(x)$
3. $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน X สำหรับทุกๆเซตเปิด V ใน Y (บทนิยาม 3.1)

บทพิสูจน์ เราจะทำการพิสูจน์ว่า $1 \Leftrightarrow 2$ และ $1 \Leftrightarrow 3$

$(1 \Rightarrow 2)$ สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ให้ $x \in X$ และลำดับ (x_n) ที่ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

สมมติว่าลำดับ $(f(x_n))$ ไม่ลู่เข้าสู่ $f(x)$

ดังนั้นจะมี $\varepsilon > 0$ ที่ซึ่งสำหรับทุกๆ $n \in \mathbb{N}$ เรามีว่า $d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$

ให้ $\delta > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ดังนั้นจะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N$ เราจะได้ว่า

$$d(x_n, x) < \delta$$

นั่นคือ จะมี $\varepsilon > 0$ ที่ซึ่งสำหรับทุกๆ $\delta > 0$ ซึ่ง $d(x_n, x) < \delta$ แต่ $d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ x ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน

เพราะฉะนั้น ลำดับ $(f(x_n))$ ลู่เข้าสู่ $f(x)$

$(2 \Rightarrow 1)$ สมมติสำหรับ $x \in X$ และสำหรับลำดับ (x_n) ที่ลู่เข้าสู่ x เราจะได้ว่า ลำดับ $(f(x_n))$

จะลู่เข้าสู่ $f(x)$

สมมติให้มี $x_0 \in X$ ที่ซึ่ง f ไม่ต่อเนื่องที่ x_0

นั่นคือ จะมี $\varepsilon > 0$ ที่ซึ่งสำหรับทุกๆ $\delta > 0$ ซึ่ง $d(x, x_0) < \delta$ แต่ $d(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon$

สำหรับแต่ละ $n \geq N$ จะได้ว่า $\frac{1}{n} > 0$ โดยข้อสมมติฐานเราจะได้ว่ามี $x_n \in X$ ที่ซึ่ง

$$d(x_n, x_0) < \frac{1}{n} \text{ แต่ } d(f(x_n), f(x_0)) \geq \varepsilon$$

นั่นคือ เราได้สร้างลำดับ (x_n) ซึ่งลู่เข้าสู่ x เมื่อ $n \rightarrow \infty$ แต่ลำดับ $(f(x_n))$ ไม่ลู่เข้าสู่ $f(x)$

ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติฐาน

เพราะฉะนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

$(1 \Rightarrow 3)$ สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ให้ V เป็นเซตเปิดใน Y เราต้องการแสดงว่า $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน X

ให้ $x \in f^{-1}(V)$ ดังนั้น $f(x) \in V$ เนื่องจาก V เป็นเซตเปิด ดังนั้น จะมี $\varepsilon > 0$ ที่ซึ่ง

$$B(f(x); \varepsilon) \subseteq V$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ที่ซึ่งสำหรับ $y \in X$ ที่ซึ่ง

$$d(y, x) < \delta \text{ เราจะได้ว่า } d(f(y), f(x)) < \varepsilon$$

หรือ ถ้า $y \in B(x; \delta)$ แล้ว $f(y) \in B(f(x); \varepsilon)$ นั่นคือ $f(B(x; \delta)) \subseteq B(f(x); \varepsilon)$

$$\text{ดังนั้น } B(x; \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x); \varepsilon)) \subseteq f^{-1}(V)$$

เพราะฉะนั้น $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิด

($3 \Rightarrow 1$) สมมติ $f^{-1}(V)$ เป็นเซตเปิดใน X สำหรับทุกๆเซตเปิด V ใน Y

ให้ $x \in X$ และ $\varepsilon > 0$ ดังนั้น $B(f(x); \varepsilon)$ เป็นเซตเปิดใน Y

โดยสมมติฐานจะได้ว่า $f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$ เป็นเซตเปิดใน X

เนื่องจาก $x \in f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$ และ $f^{-1}(B(f(x); \varepsilon))$ เป็นเซตเปิด ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ที่ซึ่ง

$$B(x; \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x); \varepsilon)) \text{ หรือ } f(B(x; \delta)) \subseteq B(f(x); \varepsilon)$$

นั่นคือสำหรับ $y \in X$ ที่ซึ่ง

$$\text{ถ้า } y \in B(x; \delta) \text{ แล้วได้ว่า } f(y) \in B(f(x); \varepsilon)$$

หรือ ถ้า $d(y, x) < \delta$ เราจะได้ว่า $d(f(y), f(x)) < \varepsilon$

นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง □

แบบฝึกหัดประจำบทที่ 3

1. สมมติให้ $f: X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ถ้า x เป็นจุดลิมิตของ $A \subseteq X$ แล้ว จำเป็นหรือไม่ที่ $f(x)$ ต้องเป็นจุดลิมิตของ $f(A) \subseteq Y$ จงอธิบายเหตุผล

2. ให้ τ และ τ' เป็นทอพอโลยีบนเซต X และให้ $\text{id}: (X, \tau') \rightarrow (X, \tau)$ แทนการส่งเอกลักษณ์บน X จงแสดงว่า

$$2.1 \quad \text{id เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง} \Leftrightarrow \tau \subseteq \tau'$$

$$2.2 \quad \text{id เป็นฟังก์ชันสมานสัณฐาน} \Leftrightarrow \tau = \tau'$$

3. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน $f: (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ ที่มีความต่อเนื่องแค่เพียงจุดเดียว

4. ให้ $x_0 \in X$ และ $y_0 \in Y$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f: X \rightarrow X \times Y$ และ $g: Y \rightarrow X \times Y$ นิยามโดย

$$f(x) = (x, y_0) \text{ และ } g(y) = (x_0, y)$$

สำหรับทุก $x \in X$ และ $y \in Y$ เป็นฟังก์ชันแบบฝังใน (imbedding function) นั่นคือ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบ 1-1 โดยที่ f^{-1} และ g^{-1} เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย

5. ให้ $f: A \rightarrow B$ และ $g: C \rightarrow D$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นิยามฟังก์ชัน

$$f \times g: A \times C \rightarrow B \times D \text{ โดย}$$

$$f \times g(a, c) = (f(a), g(c))$$

จงแสดงว่า $f \times g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

6. ให้ $F: X \times Y \rightarrow Z$ เราจะกล่าวว่า F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนแต่ละตัวแปรแยกกัน (continuous in each variable separately) ถ้า

(i) แต่ละ $y_0 \in Y$ ฟังก์ชัน $h: X \rightarrow Z$ นิยามโดย

$$h(x) = F(x, y_0) \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ}$$

(ii) แต่ละ $x_0 \in X$ ฟังก์ชัน $k: Y \rightarrow Z$ นิยามโดย

$$k(y) = F(x_0, y) \text{ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง}$$

จงแสดงว่า ถ้า F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แล้ว F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนแต่ละตัวแปรแยกกัน

บทที่ 4 ความเชื่อมโยงและความกระชับ (Connectedness and compactness)

ในวิชาแคลคูลัสมีทฤษฎีบทที่สำคัญอยู่ 2 ทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

- ทฤษฎีบทค่ากลาง (Intermediate Value Theorem)

ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว ทุกๆ $r \in (f(a), f(b))$ จะมี $c \in [a, b]$ ที่ซึ่ง

$$f(c) = r$$

- ทฤษฎีบทค่าสุดขีด (Extreme Value Theorem)

ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว จะมี $c, d \in [a, b]$ ที่ซึ่ง $f(x) \leq f(c)$ และ

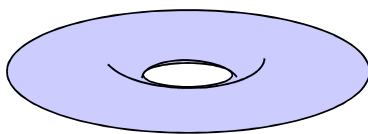
$$f(x) \geq f(d) \text{ สำหรับทุกๆ } x \in [a, b]$$

เราจะเห็นว่าทฤษฎีบทดังกล่าวเป็นจริงเมื่อ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามบน $[a, b]$ ซึ่งสมบัติที่สำคัญของช่วงปิด $[a, b]$ ก็คือ ความเชื่อมโยง และ ความกระชับ

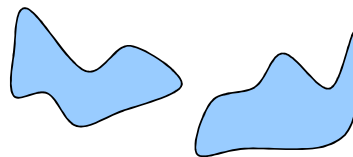
ในบทนี้เราจะทำการนิยามและศึกษาสมบัติทั้งสองบนปริภูมิทอพอโลยีที่กำหนดดังจะกล่าวต่อไป

1. ความเชื่อมโยง (connectedness)

แนวคิดเรื่องความเชื่อมโยงเกิดจากการที่เราพยายามจะพิจารณาว่าปริภูมิทอพอโลยีที่กำหนดให้มีเพียงส่วนเดียวหรือมากกว่าหนึ่งส่วน ซึ่งแนวคิดของนิยามเรื่องความเชื่อมโยงได้มาจากรูปภาพดังต่อไปนี้



X เป็นเซตเชื่อมโยง



X ไม่เป็นเซตเชื่อมโยง

บทนิยาม 4.1 ความแบ่งแยก (separation) ของปริภูมิทอพอโลยี (X, τ) คือคู่ของเซตย่อย U และ V ของ X ที่มีสมบัติดังนี้

1. U และ V เป็นเซตเปิด และ ไม่ว่าง
2. $U \cap V = \emptyset$
3. $U \cup V = X$

บทนิยาม 4.2 เราจะกล่าวว่าปริภูมิทอพอโลยี (X, τ) เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยง (disconnected space) ก็ต่อเมื่อ เราสามารถหาความแบ่งแยกของ X ได้

และเราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิเชื่อมโยง (connected space) ก็ต่อเมื่อ เราไม่สามารถหาความแบ่งแยกได้บน X

ข้อสังเกต ถ้า U และ V เป็นความแบ่งแยกบน X แล้วจะได้ว่า U และ V เป็นทั้งเซตเปิดและปิดใน X

ทฤษฎีบทที่ 4.1 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิเชื่อมโยง ก็ต่อเมื่อ $\emptyset$ และ X เป็นเพียงสองเซตย่อยที่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

บทพิสูจน์

($\Rightarrow$) สมมติให้ X เป็นปริภูมิเชื่อมโยง และสมมติให้ U เป็นเซตย่อยของ X ซึ่ง $U \neq \emptyset, X$ และ U เป็นทั้งเซตเปิดและปิด ให้ $V = X - U$ จะได้ว่า $V \neq \emptyset$, V เป็นเซตเปิด ซึ่ง $U \cap V = \emptyset$ และ $U \cup V = X$ ดังนั้น U และ V เป็นการแบ่งแยกบน X

ซึ่งขัดแย้งกับการที่ X เป็นปริภูมิที่เชื่อมโยง

เพราะฉะนั้น $\emptyset$ และ X เป็นเพียงสองเซตย่อยที่เป็นเซตเปิดและปิด

($\Leftarrow$) สมมติให้ $\emptyset$ และ X เป็นเพียงสองเซตย่อยที่เป็นเซตเปิดและปิด

สมมติให้ X เป็นเซตที่ไม่เชื่อมโยงที่มีความแบ่งแยกเป็น U และ V

ดังนั้น จากข้อสังเกตได้ว่า U และ V เป็นทั้งเซตเปิดและปิด โดยสมมติฐานจะได้ว่า

$U = X$ หรือ $U = \emptyset$

ถ้า $U = X$ แล้วจะได้ว่า $V = X - X = \emptyset$ เกิดข้อขัดแย้ง

ถ้า $U = \emptyset$ แล้วจะได้ว่า เป็นไปไม่ได้เพราะว่า U และ V เป็นการแบ่งแยกบน X

เพราะฉะนั้น X เป็นปริภูมิเชื่อมโยง □

บทนิยาม 4.3 ให้ U และ V เป็นเซตย่อยของปริภูมิทอพอโลยี X เราจะกล่าวว่า คู่ (U, V) แบ่งแยกจากกัน (U and V are separated) ก็ต่อเมื่อ $\bar{U} \cap V = \emptyset$ และ $U \cap \bar{V} = \emptyset$

ข้อสังเกต ถ้า คู่ (U, V) แบ่งแยกจากกัน แล้วจะได้ว่า $U \cap V = \emptyset$

แต่บทกลับไม่จริงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.1 ใน $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ ถ้าเราให้ $U = (0,1)$ และ $V = [1,2]$ แล้วเราจะได้ว่า $U \cap V = \emptyset$ แต่ $\bar{U} \cap V = \{1\} \neq \emptyset$ ดังนั้น U ไม่แบ่งแยกจาก V

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ให้ Y เป็นปริภูมิทอพอโลยีย่อยของ X เราจะได้ว่า ความแบ่งแยก U และ V ใน Y คือคู่ของเซตย่อยที่ไม่ว่างซึ่งแบ่งแยกจากกัน และ $U \cup V = Y$

พิสูจน์

($\Rightarrow$) สมมติให้ U และ V เป็นความแบ่งแยกใน Y นั่นคือ

1. U และ V เป็นเซตไม่ว่าง และ เปิดใน Y
2. $U \cap V = \emptyset$
3. $U \cup V = Y$

ดังนั้นเพียงพอที่จะแสดงว่า $\bar{U} \cap V = \emptyset$ และ $U \cap \bar{V} = \emptyset$

จากข้อสังเกตข้างต้นเราจะได้ว่า U เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิดใน Y ดังนั้น $U = \bar{U}$ เพราะฉะนั้น

$\bar{U} \cap V = U \cap V = \emptyset$ และในทำนองเดียวกันก็จะได้ว่า $U \cap \bar{V} = \emptyset$

($\Leftarrow$) สมมติให้ U และ V เป็นเซตย่อยที่ไม่ว่างของ Y ซึ่งแบ่งแยกจากกัน และ $U \cup V = Y$

ดังนั้นเราเพียงพอที่จะแสดงว่า U และ V เป็นเซตเปิดใน Y

เนื่องจาก $\bar{U} \cap V = \emptyset$ และ $U \cup V = Y$ แล้วเราจะได้ว่า $\bar{U} = U$

ในทำนองเดียวกันเราจะได้ว่า $\bar{V} = V$

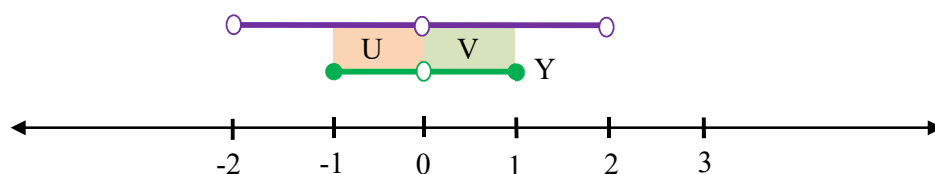
เพราะฉะนั้น $V = Y - U = Y - \bar{U}$ เป็นเซตเปิดใน Y

และ $U = Y - V = Y - \bar{V}$ เป็นเซตเปิดใน Y □

ตัวอย่าง 4.2

1. ให้ $X = \{1,2\} \subseteq \mathbb{R}$ และ $\tau_{\text{indis}} = \{\emptyset, X\}$ เป็นทอพอโลยีแบบอวิยุตบน X เราจะได้ว่า (X, τ_{indis}) เป็นปริภูมิเชื่อมโยง แต่ (X, τ_{usual}) เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยง โดยที่ τ_{usual} เป็นทอพอโลยีเซตย่อยที่ถูกถ่ายทอดจากทอพอโลยีปกติบน $\mathbb{R}$ เนื่องจาก ถ้าให้ $U = \{1\} = (0, \frac{1}{2}) \cap X$ และ $V = \{2\} = (\frac{1}{2}, 1) \cap X$ เป็นเซตเปิดใน X ที่เป็นความแบ่งแยกบนเซต X

2. ให้ $Y = [-1,0) \cup (0,1] \subset \mathbb{R}$ ภายใต้ทอพอโลยีปกติบน $\mathbb{R}$ เราจะได้ว่า Y เป็นเซตไม่เชื่อมโยง



เนื่องจาก ถ้าให้ $U = [-1, 0) = (-2, 0) \cap Y$ และ $V = (0, 1] = (0, 2) \cap Y$ เป็นเซตเปิดใน Y ที่เป็นการแบ่งแยกบนเซต Y

3. พิจารณา $\mathbb{Q}$ เป็นปริภูมิทอพอโลยีย่อยของ $\mathbb{R}$ ภายใต้ทอพอโลยีแบบปกติ เราจะได้ว่า $\mathbb{Q}$ เป็นเซตไม่เชื่อมโยง เพราะว่าถ้าเราให้ $U = (-\infty, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ และ $V = (\sqrt{2}, \infty) \cap \mathbb{Q}$ แล้ว U และ V เป็นเซตเปิดใน $\mathbb{Q}$ ซึ่งเป็นการแบ่งแยกบนเซต $\mathbb{Q}$

ทฤษฎีบทที่ 4.3 ให้ U และ V เป็นการแบ่งแยกบนปริภูมิทอพอโลยี X และ Y เป็นเซตย่อยที่เชื่อมโยงใน X แล้วเราจะได้ว่า $Y \subseteq U$ หรือ $Y \subseteq V$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

บทพิสูจน์ ให้ $A = U \cap Y$ และ $B = V \cap Y$ แล้วเราเห็นได้ชัดว่า

1. A และ B เป็นเซตเปิดใน Y
 2. $A \cap B = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \emptyset \cap Y = \emptyset$
 3. $A \cup B = (U \cap Y) \cup (V \cap Y) = (U \cup V) \cap Y = X \cap Y = Y$
- ดังนั้น A และ B เป็นการแบ่งแยกบน Y ซึ่งขัดแย้งกับการที่ Y เป็นเซตเชื่อมโยง

เพราะฉะนั้น จึงได้ว่า A หรือ B เป็นเซตว่างอย่างใดอย่างหนึ่ง

นั่นคือ $Y \subseteq U$ หรือ $Y \subseteq V$ อย่างใดอย่างหนึ่ง □

ทฤษฎีบทที่ 4.4 ยูเนียนใดๆของเซตเชื่อมโยงที่มีจุดร่วมจะเป็นเซตเชื่อมโยงด้วย

บทพิสูจน์ ให้ $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ เป็นกลุ่มของเซตเชื่อมโยง โดยที่ I เป็นเซตดัชนีใดๆ

และให้ x_0 เป็นจุดร่วมของกลุ่มข้างต้น นั่นคือ $x_0 \in U_\alpha$ ทุกๆ $\alpha \in I$

สมมติให้ $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ เป็นเซตไม่เชื่อมโยง โดยที่มีการแบ่งแยกเป็น A และ B

โดยไม่เสียใจทั่วไป สมมติให้ $x_0 \in A$ โดยทฤษฎีบทที่ 4.3 เราจะได้ว่า $U_\alpha \subseteq A$ ทุกๆ $\alpha \in I$

ดังนั้น เราจะได้ว่า $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \subseteq A$ ซึ่งส่งผลให้ $B = \emptyset$ เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ เป็นเซตเชื่อมโยง □

ทฤษฎีบทที่ 4.5 ให้ A เป็นเซตย่อยที่เชื่อมโยงของปริภูมิทอพอโลยี X และ $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ โดยที่ B เป็นเซตย่อยใดๆของ X แล้วเราจะได้ว่า B เป็นเซตเชื่อมโยง

บทพิสูจน์ สมมติให้ B เป็นเซตไม่เชื่อมโยงโดยมีการแบ่งแยกเป็น C และ D

โดยทฤษฎีบทที่ 4.3 เราจะได้ว่า $A \subseteq C$ หรือ $A \subseteq D$ อย่างใดอย่างหนึ่ง

โดยไม่เสียไร้วายไป สมมติให้ $A \subseteq C$ ดังนั้น $\bar{A} \subseteq \bar{C}$

เพราะฉะนั้น ได้ว่า $B \subseteq \bar{A} \subseteq \bar{C} = C$ ดังนั้นเราจะได้ว่า $D = \emptyset$

ซึ่งขัดแย้งกับการที่ C และ D เป็นการแบ่งแยกบน B

ดังนั้น B เป็นเซตเชื่อมโยง □

ทฤษฎีบทที่ 4.6 ให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ X เป็นปริภูมิเชื่อมโยง แล้วเราจะได้ว่า ภาพ $f(X)$ เป็นเซตเชื่อมโยงด้วย

บทพิสูจน์ สมมติให้ $f(X)$ เป็นเซตไม่เชื่อมโยงโดยมีการแบ่งแยกเป็น U และ V

นั่นคือ 1. U และ V เป็นเซตเปิด ที่ไม่ว่าง

2. $U \cap V = \emptyset$

3. $U \cup V = f(X)$

ให้ $A = f^{-1}(U)$ และ $B = f^{-1}(V)$ โดยเงื่อนไข 1. และจากการที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเราจะได้ว่า A และ B เป็นเซตเปิดที่ไม่ว่าง

จากเงื่อนไขที่ 2-3 เราจะได้ว่า $A \cap B = \emptyset$ และ $A \cup B = X$

ดังนั้น A และ B เป็นการแบ่งแยกบน X ซึ่งขัดแย้งกับการที่ X เป็นเซตเชื่อมโยง

เพราะฉะนั้น $f(X)$ เป็นเซตเชื่อมโยง □

ทฤษฎีบทที่ 4.7 ทฤษฎีบทค่ากลาง (Intermediate Value Theorem)

ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว ถ้า $r \in (f(a), f(b))$ แล้วจะมี $c \in [a, b]$ ที่ซึ่ง $f(c) = r$

บทพิสูจน์ ให้ $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

โดยไม่เสียไร้วายไปสมมติให้ $f(a) \leq f(b)$ ให้ $r \in (f(a), f(b))$

สมมติว่าไม่มี $c \in [a, b]$ ที่ซึ่ง $f(c) = r$

ให้ $A = f([a, b]) \cap (-\infty, r)$ และ $B = f([a, b]) \cap (r, \infty)$ สังเกตว่า A และ B ไม่ใช่เซตว่าง

เพราะว่า ทั้งสองเซตมี $f(a)$ และ $f(b)$ เป็นสมาชิกอยู่เซตละตัว

นอกจากนั้นเราจะได้อีกว่า $A \cap B = \emptyset$ และ $A \cup B = f([a, b])$ นั่นคือ A และ B เป็นการ

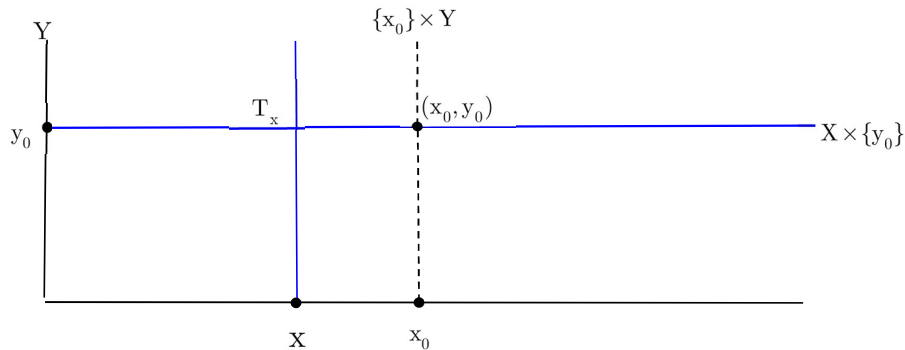
แบ่งแยกบน $f([a, b])$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ $f([a, b])$ เป็นเซตเชื่อมโยง

เพราะฉะนั้น จะมี $c \in [a, b]$ ที่ซึ่ง $f(c) = r$ □

ทฤษฎีบทที่ 4.8 ให้ X และ Y เป็นปริภูมิเชื่อมโยง แล้วเราจะได้ว่า $X \times Y$ เป็นเซตเชื่อมโยง ภายใต้ทอพอโลยีผลคูณ

บทพิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นปริภูมิเชื่อมโยง ให้ $(x_0, y_0) \in X \times Y$

เห็นได้ชัดว่า ปริภูมิ $X \times \{y_0\}$ และปริภูมิ $\{x_0\} \times Y$ สอดคล้องกับ X และ Y ตามลำดับ ดังนั้นจึงเป็นเซตเชื่อมโยงด้วย



ดังนั้น สำหรับทุก $x \in X$ เซต $T_x = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x\} \times Y)$

เป็นเซตเชื่อมโยง เพราะว่ามี (x, y_0) เป็นจุดร่วม

และสังเกตว่า $X \times Y = \bigcup_{x \in X} T_x$ ซึ่งมี (x_0, y_0) เป็นจุดร่วมจึงเป็นเซตที่เชื่อมโยงด้วย $\square$

2. ความเชื่อมโยงเชิงวิถี (path connected)

บทนิยาม 4.4 ให้ X เป็นปริภูมิทอพอโลยี และ $x, y \in X$

วิถีจาก x ไปยัง y (path from x to y) คือ ฟังก์ชันต่อเนื่อง $p : [0, 1] \rightarrow X$ ซึ่งมีสมบัติว่า

$p(0) = x$ และ $p(1) = y$

บทนิยาม 4.5 เราจะกล่าวว่าปริภูมิทอพอโลยี X เป็นปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิถี (path connected) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x, y \in X$ เราสามารถหาวิถีใน X ที่เชื่อมโยง x และ y ได้

ทฤษฎีบทที่ 4.9 ปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิถีเป็นปริภูมิเชื่อมโยง

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิถี สมมติให้ X เป็นปริภูมิไม่เชื่อมโยงโดยมีการแบ่งแยกเป็น U และ V

เนื่องจาก U และ V เป็นเซตไม่ว่าง ดังนั้นให้ $x \in U$ และ $y \in V$ ดังนั้นเราจะสามารถหาวิถี

$p : [0,1] \rightarrow X = U \cup V$ ที่ซึ่ง $p(0) = x$ และ $p(1) = y$

เนื่องจาก p เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $[0,1]$ เป็นเซตเชื่อมโยง ดังนั้น $p[0,1]$ เป็นเซตเชื่อมโยงด้วย

จาก $p(0) = x \in U$ โดยทฤษฎีบทที่ 4.3 เราจะได้ว่า $p[0,1] \subset U$

เพราะฉะนั้น $p(1) = y \in U$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ $U \cap V = \emptyset$

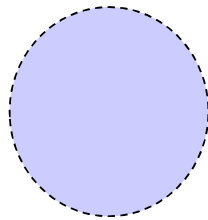
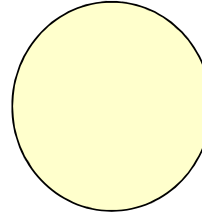
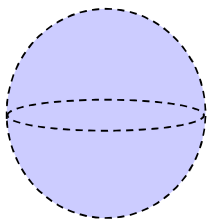
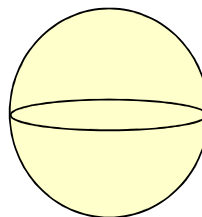
ดังนั้น X เป็นปริภูมิเชื่อมโยง □

ตัวอย่าง 4.3

1. ให้ $B^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < 1\}$ และ

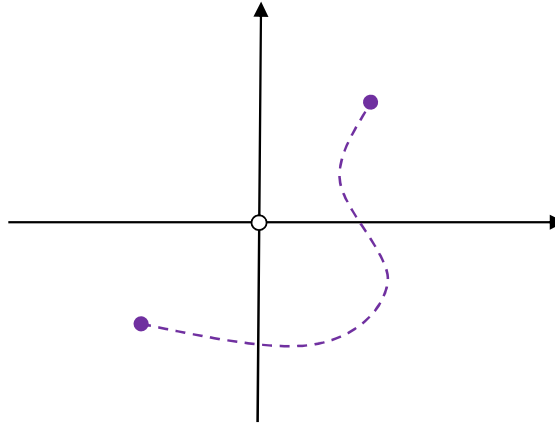
$$D^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$$

เรียก B^n ว่าเป็นบอลเปิดมิติ n ใน $\mathbb{R}^n$ และ D^n ว่าเป็นจานเปิดมิติ n ใน $\mathbb{R}^n$


 B^2

 D^2

 B^3

 D^3

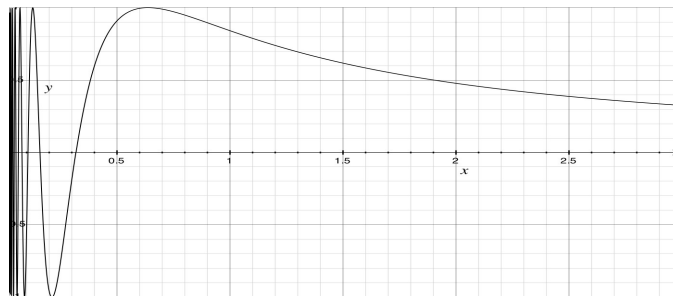
เราเห็นได้ชัดว่า B^n และ D^n เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถี ดังนั้นเป็นเซตเชื่อมโยงด้วย

2. เซต $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ (puncture plane) เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถี ดังนั้นเป็นเซตเชื่อมโยงด้วย



3. ให้ $S = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$

นิยามให้ $\bar{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ เรียกว่า เส้นโค้งไซน์ของนักทอพอยี (Topologist's sine curve)



สังเกตว่า $S = \{(x, \sin \frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\}$ คือ ภาพของเซตเชื่อมโยง $(0,1]$ กล่าวคือ $S = f((0,1])$ โดยที่ $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ เป็นการส่งที่ต่อเนื่อง ดังนั้น S จึงเป็นเซตเชื่อมโยง เพราะฉะนั้น $\bar{S}$ จึงเป็นเซตเชื่อมโยงด้วย

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า S ไม่ใช่ปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิถี

สมมติให้ S เป็นปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิถี ดังนั้นจะมีวิถีต่อเนื่อง f ที่ซึ่ง $f(t) = (a(t), b(t))$ โดยที่ $a, b : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง $f(0) = (0,0)$ และ $f(1) = (\frac{1}{\pi}, 1)$ โดยที่ $f(t) \in \bar{S}$ ทุกๆ $t \in [0,1]$

โดยทฤษฎีบทค่ากลางจะได้ว่า มี $0 < t_1 < 1$ ที่ซึ่ง $a(t_1) = \frac{2}{3\pi}$

ในทำนองเดียวกันจะมี $0 < t_2 < t_1$ ที่ซึ่ง $a(t_2) = \frac{2}{5\pi}$

ประยุกต์ทฤษฎีบทค่ากลางต่อไปเรื่อยๆ เราจะได้ว่า มีลำดับ (t_n) ที่ซึ่ง $a(t_n) = \frac{2}{(2n+1)\pi}$

ทุกๆค่า n และ สังเกตว่า $b(t_n) = (-1)^n$

เนื่องจากลำดับ (t_n) เป็นลำดับลดที่มีค่าขอบเขตล่าง ดังนั้นลำดับ (t_n) จึงลู่เข้า

และเนื่องจากว่า f เป็นวิธิต่อเนื่อง จึงทำให้ได้ว่า ลำดับ

$$f(t_n) = (a(t_n), b(t_n)) = \left(\frac{2}{(2n+1)\pi}, (-1)^n \right) \text{ ลู่เข้าด้วย}$$

แต่จะเห็นได้ว่า ลำดับ $(b(t_n))$ ไม่ได้ลู่เข้าจึงทำให้เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น S ไม่ใช่ปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิธิต

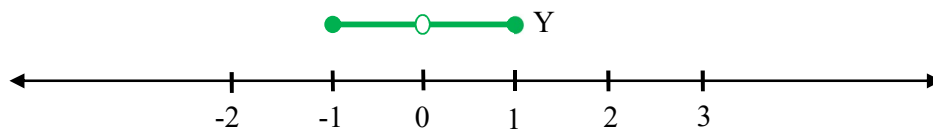
บทนิยาม 4.6 เราจะกล่าวว่าปริภูมิทอพอโลยี X เป็นปริภูมิเชื่อมโยงเฉพาะที่ (locally connected) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x \in X$ และสำหรับทุกเซตเปิด U ที่คลุม x จะมีเซตเชื่อมโยงเปิด V ที่ซึ่ง $x \in V \subseteq U$

และ เราจะกล่าวว่าปริภูมิทอพอโลยี X เป็นปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิธิตเฉพาะที่ (locally path connected) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x \in X$ และสำหรับทุกเซตเปิด U ที่คลุม x จะมีเซตเชื่อมโยงเชิงวิธิตเปิด V ที่ซึ่ง $x \in V \subseteq U$

- ข้อสังเกต**
1. ปริภูมิเชื่อมโยงเป็นปริภูมิเชื่อมโยงเฉพาะที่
 2. ปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิธิตเป็นปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิธิตเฉพาะที่

ตัวอย่าง 4.4

1. ให้ $Y = [-1, 0) \cup (0, 1] \subset \mathbb{R}$ ภายใต้ทอพอโลยีปกติบน $\mathbb{R}$ จากตัวอย่าง 4.2 เราจะได้ว่า Y เป็นไม่เชื่อมโยงแต่ Y เป็นเซตเชื่อมโยงเฉพาะที่



2. เซตของจำนวนตรรกยะ $\mathbb{Q}$ ไม่เป็นทั้งปริภูมิเชื่อมโยงและปริภูมิเชื่อมโยงเฉพาะที่

บทนิยาม 4.7 ให้ X เป็นปริภูมิทอพอโลยี และ ให้ $x, y \in X$ เราจะกล่าวว่า

x เชื่อมโยงกับ y เขียนแทนด้วย $x \sim_{\text{conn}} y$ ก็ต่อเมื่อ มีเซตย่อยที่เชื่อมโยง A ของ X ที่ซึ่ง $x, y \in A$

x เชื่อมโยงเชิงวิถีกับ y เขียนแทนด้วย $x \sim_{\text{pconn}} y$ ก็ต่อเมื่อ มีวิถีที่ต่อเนื่อง $\lambda : [0, 1] \rightarrow X$ ที่ซึ่ง $\lambda(0) = x$ และ $\lambda(1) = y$

ข้อสังเกต (ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

1. $\sim_{\text{conn}}$ และ $\sim_{\text{pconn}}$ เป็นความสัมพันธ์เทียบเท่าบนเซต X
2. แต่ละชั้นเทียบเท่า $[x]_{\text{conn}} \in X / \sim_{\text{conn}}$ เรียกว่า องค์ประกอบเชื่อมโยง (connected component) และได้ว่า $[x]_{\text{conn}}$ คือเซตเชื่อมโยงที่ใหญ่ที่สุดใน X ซึ่งคลุมจุด x และเรียก ชั้นเทียบเท่า $[x]_{\text{pconn}} \in X / \sim_{\text{pconn}}$ ว่า องค์ประกอบเชื่อมโยงเชิงวิถี (path-connected component) และได้ว่า $[x]_{\text{pconn}}$ คือเซตเชื่อมโยงเชิงวิถีที่ใหญ่ที่สุดใน X ซึ่งคลุมจุด x

ตัวอย่าง 4.5

1. เซตของจำนวนตรรกยะ $\mathbb{Q}$ ใน $\mathbb{R}$ เราได้ว่า แต่ละองค์ประกอบเชื่อมโยงและองค์ประกอบเชื่อมโยงเชิงวิถี ประกอบด้วยจุดแค่จุดเดียว (singleton set)
2. เส้นโค้งไซน์ของนักทอพอยี (Topologist's sine curve) $\bar{S} = S \cup (\{0\} \times [-1, 1])$ จากตัวอย่างที่ 4.3 มีองค์ประกอบเชื่อมโยงเพียงหนึ่งเดียวคือ $\bar{S}$ แต่จะมี 2 องค์ประกอบเชื่อมโยงเชิงวิถีคือ S และ $\{0\} \times [-1, 1]$

ทฤษฎีบทที่ 4.10 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิเชื่อมโยงเฉพาะที่ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆเซตเปิด U ใน X ได้ว่าทุกๆองค์ประกอบเชื่อมโยงใน U เป็นเซตเปิดใน X

บทพิสูจน์ สมมติให้ X เป็นปริภูมิเชื่อมโยงเฉพาะที่ และให้ U เป็นเซตเปิดใน X และให้ C เป็นองค์ประกอบเชื่อมโยง ใน U ให้ $x \in C$ ดังนั้นจะมี เซตเปิดที่เชื่อมโยง V ที่ซึ่ง $x \in V \subseteq U$ เนื่องจาก C เป็นเซตเชื่อมโยงที่ใหญ่ที่สุดที่คลุม x ดังนั้น $V \subseteq C$ นั่นคือเราได้แสดงแล้วว่า C เป็นเซตเปิด

ในทางกลับกัน ให้ $x \in X$ และให้ U เป็นเซตเปิดที่คลุม x ให้ C เป็นองค์ประกอบของ U ที่คลุม x โดยสมมติฐานจะได้ว่า C เป็นเซตเปิด ที่ซึ่ง $x \in C \subseteq U$ เนื่องจาก C เป็นเซตเชื่อมโยง ดังนั้น X จึงเป็นปริภูมิเชื่อมโยงเฉพาะที่ $\square$

ทฤษฎีบทที่ 4.11 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิธียเฉพาะที่ ก็ต่อเมื่อ ทุกๆเซตเปิด U ใน X ได้ว่าทุกๆองค์ประกอบเชื่อมโยงเชิงวิถีใน U เป็นเซตเปิดใน X

บทพิสูจน์ ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบทที่ 4.10 $\square$

ทฤษฎีบทที่ 4.12 ปริภูมิทอพอโลยี X ที่เชื่อมโยงและเชื่อมโยงเชิงวิธียเฉพาะที่ เป็นปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิถี

บทพิสูจน์ สมมติให้ X เป็นปริภูมิที่เชื่อมโยงและเชื่อมโยงเชิงวิธียเฉพาะที่ ให้ $x \in X$ ให้ P เป็นองค์ประกอบเชิงวิถีที่คลุม x ได้ว่า $P \subseteq X$ และ P เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถี ดังนั้นจึงเป็นเซตเชื่อมโยงด้วย

สมมติว่า $P \neq X$ ดังนั้น ให้ Q เป็นยูเนียนขององค์ประกอบองค์ประกอบเชื่อมโยงเชิงวิถี ส่วนอื่นที่แตกต่างจาก P ดังนั้นจะได้ว่า $X = P \cup Q$ และ $P \cap Q = \emptyset$ โดย ทฤษฎีบทที่ 4.11 เราได้ว่า P และ Q เป็นเซตเปิด ดังนั้น จึงได้ว่า X เป็นเซตไม่เชื่อมโยงซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน เพราะ ฉะนั้น $P = X$ นั่นคือ X เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถี $\square$

3. ความกระชับ (compactness)

บทนิยาม 4.8 เราจะกล่าวว่ากลุ่มของเซตย่อย $\mathcal{C}$ ของ X เป็นเซตปก (cover) ของ X ก็ต่อเมื่อ $\bigcup \mathcal{C} = X$

และ ถ้าทุกสมาชิกในกลุ่ม $\mathcal{C}$ เป็นเซตเปิด เราจะกล่าวว่า $\mathcal{C}$ เป็นเซตปกเปิด (open cover) สำหรับ $Y \subseteq X$ เซตปกเปิดของ Y คือ กลุ่มของเซตเปิดย่อย $\mathcal{C}'$ ใน X ที่ซึ่ง $\bigcup \mathcal{C}' \supseteq Y$

บทนิยาม 4.9 เราจะกล่าวว่า $K \subseteq X$ เป็นเซตกระชับ (compact set) ก็ต่อเมื่อทุกๆเซตปกเปิดของ K มีกลุ่มย่อยจำนวนจำกัดที่ยังคงคลุมเซต K อยู่

ตัวอย่าง 4.6

1. $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ ไม่ใช่ปริภูมิที่กระชับ เนื่องจาก เรามีว่า $\mathcal{C} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ เป็นเซตปกเปิดของ $\mathbb{R}$ แต่เราไม่สามารถที่จะหากลุ่มย่อยจำนวนจำกัดของ $\mathcal{C}$ ที่ยังคงคลุม $\mathbb{R}$
2. ให้ X เป็นเซตจำกัด แล้วเราจะได้ว่า ทุกๆทอพอโลยีบน X จะเป็นเซตจำกัดด้วย ดังนั้น X จึงเป็นปริภูมิที่กระชับ
3. ให้ X เป็นเซตใด และให้ $\tau_{\text{indis}} = \{X, \emptyset\}$ เป็นทอพอโลยีอวิยุตบน X เราจะได้ว่า (X, τ_{indis}) เป็นปริภูมิที่กระชับ

ทฤษฎีบทที่ 4.13 ทุกๆเซตปิดย่อยของปริภูมิกระชับเป็นเซตกระชับ

บทพิสูจน์ ให้ K เป็นเซตปิดย่อยของปริภูมิที่กระชับ X และ ให้ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นเซตปกเปิดของ K โดยที่ I เป็นเซตดัชนี

ดังนั้นเราจะได้ว่า $\{U_\alpha \mid \alpha \in I\} \cup \{X - K\}$ เป็นเซตปกเปิดของ X เนื่องจาก X เป็นปริภูมิกระชับ ดังนั้นจะมีกลุ่มย่อยจำนวนจำกัด $\{U_{\alpha_i}, X - K \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ ที่ครอบคลุม X นั่นคือ

$$(X - K) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \right) = X$$

เนื่องจาก $K \subseteq X$ และ $K \cap (X - K) = \emptyset$ ดังนั้นจะได้ว่า $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ นั่นคือ K เป็นเซตกระชับ □

ทฤษฎีบทที่ 4.14 ภาพของเซตกระชับภายใต้การส่งแบบต่อเนื่องเป็นเซตกระชับ

บทพิสูจน์ ให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นการส่งที่ต่อเนื่อง และ X เป็นเซตกระชับ

ต้องการจะแสดงว่า $f(X)$ เป็นเซตกระชับ ให้ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นเซตปกเปิดของ $f(X)$ โดยที่ I เป็นเซตดัชนี เนื่องจาก f เป็นการส่งแบบต่อเนื่อง ดังนั้น $f^{-1}(U_\alpha)$ เป็นเซตเปิดใน X ทุกๆ $\alpha \in I$ และได้

$$\text{อีกว่า } X = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(U_\alpha)$$

เนื่องจาก X เป็นปริภูมิกระชับ ดังนั้นจะมีกลุ่มย่อยจำนวนจำกัด $\{f^{-1}(U_{\alpha_i}) \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ ที่คลุม

X นั่นคือ $X = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i})$ เพราะฉะนั้น

$$f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(U_{\alpha_i})\right) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$$

นั่นคือ $f(X)$ เป็นเซตกระชับ

□

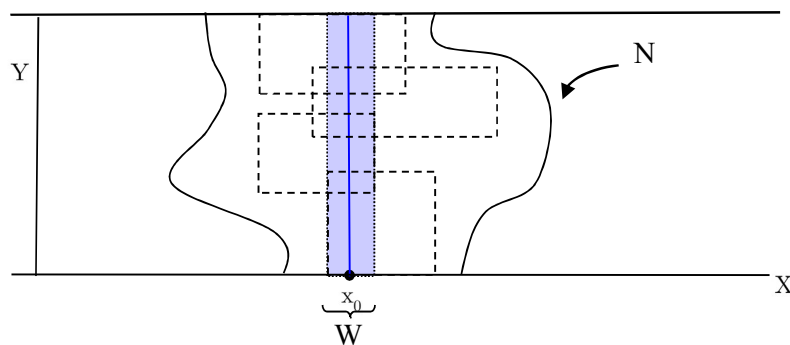
ในการที่จะแสดงว่าผลคูณคาร์ทีเซียนระหว่างเซตกระชับเป็นเซตกระชับนั้นต้องอาศัยบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้งที่ 4.15 (บทตั้งท่อ : The tube lemma)

ให้ X และ Y เป็นปริภูมิทอพอโลยี พิจารณา $X \times Y$ ภายใต้ทอพอโลยีผลคูณ สมมติให้ Y เป็นปริภูมิกระชับ และให้ $x_0 \in X$ ถ้า N เป็นเซตเปิดใน $X \times Y$ ที่ซึ่ง $\{x_0\} \times Y \subseteq N$ แล้วจะมีเซตเปิด W ใน X ที่คลุม x_0 ที่ซึ่ง $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y \subseteq N$ เราเรียก $W \times Y$ ว่าเป็นท่อของ $\{x_0\} \times Y$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก N เป็นเซตเปิดใน $X \times Y$ ที่ซึ่ง $\{x_0\} \times Y \subseteq N$ ดังนั้นจะมี สมาชิกฐานหลักสำหรับทอพอโลยีผลคูณในรูป $U_\alpha \times V_\alpha$ โดยที่ $\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} (U_\alpha \times V_\alpha) \subseteq N$ โดยที่ I เป็นเซตดัชนี ดังนั้น $\{U_\alpha \times V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ เป็นเซตปกเปิดของ $\{x_0\} \times Y$ เนื่องจาก $\{x_0\} \times Y$ สமானสัณฐานกับ Y ที่เป็นปริภูมิกระชับ ดังนั้นจะมี $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in I$ ที่ซึ่ง

$$\{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i})$$



ให้ $W = \bigcap_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ ดังนั้น W เป็นเซตเปิดซึ่ง $\{x_0\} \times Y \subseteq W \times Y$

ต่อไปจะแสดงว่า $W \times Y \subseteq N$

ให้ $(x, y) \in W \times Y$ เนื่องจาก $(x_0, y) \in \{x_0\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i})$ ดังนั้นจะมี

$i_0 \in \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ ที่ซึ่ง $(x_0, y) \in U_{i_0} \times V_{i_0}$

เนื่องจาก $W \subseteq U_{i_0}$ ดังนั้น $(x, y) \in W \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n (U_{\alpha_i} \times V_{\alpha_i}) \subseteq N$ □

ทฤษฎีบทที่ 4.16 ผลคูณของปริภูมิกระชับเป็นปริภูมิกระชับ

บทพิสูจน์ ให้ X และ Y เป็นปริภูมิทอพอโลยีที่กระชับ ให้ $\mathcal{A}$ เป็นเซตปกเปิดของ $X \times Y$ ให้ $x \in X$ เนื่องจาก $\{x\} \times Y \cong Y$ เป็นเซตย่อยที่กระชับของ $X \times Y$ ดังนั้นจะมี

$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ ที่ซึ่ง $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i = N$

จากบทตั้ง 4.15 เราจะได้ว่ามีเซตเปิด W_x ใน X ที่ซึ่ง $\{x\} \times Y \subseteq W_x \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i = N$ ดังนั้น $\mathcal{D} = \{W_x \mid x \in X\}$ เป็นเซตปกเปิดของ X ที่เป็นปริภูมิกระชับ

เพราะฉะนั้น จะมี $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ ที่ซึ่ง $X = \bigcup_{i=1}^m W_{x_i}$ จึงได้ว่า

$$\left(\bigcup_{i=1}^m W_{x_i} \right) \times Y = X \times Y$$

แต่เนื่องจาก แต่ละ $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ $W_{x_k} \times Y$ ถูกคลุมด้วยสมาชิกใน $\mathcal{A}$ จำนวนจำกัด ดังนั้น

$X \times Y$ จึงถูกคลุมด้วยสมาชิกใน $\mathcal{A}$ จำนวนจำกัดเช่นกัน

นั่นคือ $X \times Y$ เป็นปริภูมิกระชับ □

ความกระชับบนปริภูมิอิงระยะทาง (compactness on metric spaces)

บทนิยาม 4.10 ให้ (X, d_X) เป็นปริภูมิอิงระยะทาง เราจะกล่าวว่ากลุ่มของเซตย่อย $\mathcal{C} \subseteq P(X)$ เป็นเซตปกคลุมของ X (cover of X) เมื่อ ยูเนียนของสมาชิกทั้งหมดใน $\mathcal{C}$ เท่ากับ X และจะเรียก เซตปก $\mathcal{C}$ ของ X ว่าเป็น เซตปกเปิดเมื่อ สมาชิกทุกตัวใน $\mathcal{C}$ เป็นเซตเปิด

บทนิยาม 4.11 ปริภูมิอิงระยะทาง X จะกล่าวว่าเป็น ปริภูมิกระชับ (compact space) เมื่อ สำหรับทุกๆเซตปกเปิดของ X มีเซตปกเปิดย่อยที่มีสมาชิกจำนวนจำกัดซึ่งยังปกคลุม X อยู่

สำหรับปริภูมิย่อย $Y \subseteq X$ เราจะกล่าวกลุ่มของเซตย่อย $\mathcal{C} \subseteq P(X)$ เป็นเซตปกของ Y (covering of Y) เมื่อ ยูเนียนของสมาชิกทั้งหมดใน $\mathcal{C}$ ครอบคลุม Y หรือ $\bigcup \mathcal{C} \supseteq Y$ และในทำนองเดียวกัน เราจะกล่าวว่า Y เป็น เซตกระชับ เมื่อ สำหรับทุกๆเซตปกเปิดของ Y มีเซตปกเปิดย่อยที่มีสมาชิกจำนวนจำกัดซึ่งยังปกคลุม Y อยู่

บทนิยาม 4.12 ปริภูมิอิงระยะทาง X จะกล่าวว่าเป็น ปริภูมิกระชับจุดลิมิต (limit point compact) เมื่อ ทุกๆเซตย่อย $A \subseteq X$ ที่เป็นเซตอนันต์จะมีจุดลิมิต นั่นคือ $A' \neq \emptyset$

ทฤษฎีบทที่ 4.17 ปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับเป็นปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับจุดลิมิต

บทพิสูจน์ ให้ $A \subseteq X$ โดยที่ X เป็น ปริภูมิอิงระยะทางที่กระชับ จะพิสูจน์ด้วยวิธีแย้งสลับที่ นั่นคือ ถ้า $A' = \emptyset$ แล้ว A เป็นเซตจำกัด สมมติให้ $A' = \emptyset$ ดังนั้น สำหรับ $a \in A$ จะมี $r_a > 0$ ที่ซึ่ง $B(a; r_a) \cap A = \{a\}$ และเนื่องจาก $\bar{A} = A \cup A' = A$ ดังนั้น A เป็นเซตปิด จึงทำให้ได้ว่า

$$\mathcal{C} = \{X - A\} \cup \{B(a; r_a) \mid a \in A\} \text{ เป็นเซตปกเปิดของ } X$$

เนื่องจาก X เป็นปริภูมิกระชับ จึงได้ว่า มี $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ที่ซึ่ง

$$(X - A) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n B(a_i; r_{a_i}) \right) = X$$

$$\text{เนื่องจาก } A \cap (X - A) = \emptyset \text{ ดังนั้น } A = \left(\bigcup_{i=1}^n B(a_i; r_{a_i}) \right) \cap A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

เพราะฉะนั้น A เป็นเซตจำกัดตามที่ต้องการ □

ในกรณีที่ X เป็นปริภูมิทอพอโลยี บทกลับของทฤษฎีบทข้างต้นไม่เป็นจริง

ตัวอย่าง 4.7 ให้ $Y = \{a, b\}$ และให้ $\tau_Y = \{\emptyset, Y\}$

ให้ $X = Y \times \mathbb{N}$ พิจารณาทอพอโลยีผลคูณบน X เราพิสูจน์ได้ไม่ยากว่า X เป็นปริภูมิกระชับแบบลิมิต แต่ X ไม่เป็นปริภูมิกระชับ เนื่องจาก $\mathcal{C} = \{Y \times \{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$ เป็นเซตปกเปิดของ X ซึ่งไม่สามารถหาเซตปกเปิดย่อยที่ยังปกคลุม X

บทนิยาม 4.13 ปริภูมิอิงระยะทาง X จะกล่าวว่าเป็น ปริภูมิกระชับแบบลำดับ (sequentially compact) เมื่อ ทุกๆลำดับ (x_n) ใน X มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า

ทฤษฎีบทที่ 4.18 ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทาง ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

- (i) X เป็นปริภูมิกระชับ
- (ii) X เป็นปริภูมิกระชับจุดลิมิต
- (iii) X เป็นปริภูมิกระชับแบบลำดับ

บทพิสูจน์ จะทำการพิสูจน์แบบ (i) $\Rightarrow$ (ii) , (ii) $\Rightarrow$ (iii) และ (iii) $\Rightarrow$ (i)

(i) $\Rightarrow$ (ii) ได้จากทฤษฎีบทที่ 4.17

(ii) $\Rightarrow$ (iii) สมมติให้ X เป็นปริภูมิกระชับจุดลิมิต และให้ (x_n) เป็นลำดับใดๆใน X

พิจารณา $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

ถ้า A เป็นเซตจำกัด แล้วจะได้ว่าจะมี $x \in X$ ที่ซึ่ง $x_n = x$ อยู่เป็นจำนวนอนันต์ตัว เพราะฉะนั้น

เราจะได้ว่า (x_n) มีลำดับย่อยซึ่งเป็นลำดับค่าคงตัวที่ลู่เข้าสู่ x นั่นเอง

สมมติให้ X เป็นเซตอนันต์ เนื่องจาก X เป็นปริภูมิกระชับจุดลิมิต ดังนั้นจะมี $a \in A'$

จากนั้นเราจะทำการสร้างลำดับย่อยของ (x_n) ดังนี้

เนื่องจาก A เป็นเซตอนันต์ และ $a \in A'$ ดังนั้น สำหรับแต่ละ $i \in \mathbb{N}$ จะมี $x_{n_i} \in B(a; \frac{1}{i})$

เพราะฉะนั้น เราจะเห็นว่า $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} = a$ นั่นคือ X เป็นปริภูมิกระชับแบบลำดับตามต้องการ

(ii) $\Rightarrow$ (iii) สมมติให้ X เป็นปริภูมิกระชับแบบลำดับ

เราแบ่งขั้นตอนการพิสูจน์ ออกเป็นขั้นๆดังนี้

ขั้นที่ 1 จะแสดงว่าสำหรับเซตเปิด $\mathcal{C}$ ใดๆของ X มี $\delta > 0$ ซึ่ง สำหรับ $A \subseteq X$ ถ้า

$\text{diam}(A) < \delta$ แล้วจะมี $U \in \mathcal{C}$ ที่ซึ่ง $A \subseteq U$

ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตเปิดของ X

สมมติขัดแย้ง ดังนั้น สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ จะมีเซต $A_n \subseteq X$ ที่ซึ่ง $\text{diam}(A_n) < \frac{1}{n}$ แต่ไม่มี

$U \in \mathcal{C}$ ที่ซึ่ง $A_n \subseteq U$

จากนั้น สร้างลำดับ (a_n) ใน X โดยการเลือก $a_n \in A_n$

เนื่องจาก X เป็นปริภูมิกระชับแบบลำดับ ดังนั้นจึงมีลำดับย่อย (a_{k_n}) ที่ลู่เข้า เรียกจุดลิมิตของ

ลำดับดังกล่าวว่า a

เนื่องจาก $\mathcal{C}$ เป็นเซตเปิดของ X ดังนั้น จะมี $U \in \mathcal{C}$ ที่ซึ่ง $a \in U$ และจาก U เป็นเซต

เปิด จึงมี $\varepsilon > 0$ ที่ซึ่ง $a \in B(a; \varepsilon) \subseteq U$

โดยหลักของอาร์คิมิดีส จะมีจำนวนนับ $n \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง $\frac{1}{k_n} < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

เนื่องจาก $\text{diam}(A_{k_n}) < \frac{1}{k_n}$ ดังนั้น $A_{k_n} \subseteq B(a_{k_n}; \frac{\varepsilon}{2})$ และจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{k_n} = a$ เราสามารถเลือก $n \in \mathbb{N}$ ที่ใหญ่มากพอที่ทำให้ $A_{k_n} \subseteq B(a; \varepsilon) \subseteq U$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับสมบัติของ A_n ข้างต้น

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta > 0$ ที่ซึ่ง สำหรับ $A \subseteq X$ ถ้า $\text{diam}(A) < \delta$ แล้วจะมี $U \in \mathcal{C}$ ที่ซึ่ง $A \subseteq U$

ขั้นที่ 2 จะแสดงว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ เราสามารถคลุม X ได้ด้วยบอลเปิดรัศมี ε จำนวนจำกัด สมมติขัดแย้ง นั่นคือ มี $\varepsilon > 0$ ซึ่งเราไม่สามารถคลุม X ได้ด้วยบอลเปิดรัศมี ε จำนวนจำกัด

ต่อไปจะทำการสร้างลำดับ (x_n) ใน X ดังนี้

ให้ $x_1 \in X$ เป็นจุดใดๆ

เนื่องจาก $B(x_1; \varepsilon) \neq X$ ดังนั้น เลือก $x_2 \in X - B(x_1; \varepsilon)$

และเนื่องจาก $B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon) \neq X$ ดังนั้น เลือก $x_3 \in X - (B(x_1; \varepsilon) \cup B(x_2; \varepsilon))$

ในกรณีใดๆ เราสามารถ เลือก $x_{n+1} \in X - \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon)$

เนื่องจาก X สามารถปกคลุมได้ด้วยบอลเปิดรัศมี ε จำนวนจำกัด ดังนั้น

สำหรับแต่ละ $i, j \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $i \neq j$

เรามีว่า $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ เพราะฉะนั้น ลำดับ (x_n) ที่สร้างจะไม่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้า ซึ่งขัดแย้งกับ

การที่ X เป็นปริภูมิกระชับแบบลำดับ

เพราะฉะนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ เราสามารถคลุม X ได้ด้วยบอลเปิดรัศมี ε จำนวนจำกัด

ขั้นที่ 3 จะแสดงว่า X เป็นปริภูมิกระชับ

ให้ $\mathcal{C}$ เป็นเซตปกเปิดของ X จากขั้นที่ 1 จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง สำหรับ $A \subseteq X$ ถ้า $\text{diam}(A) < \delta$ แล้วจะมี $U \in \mathcal{C}$ ที่ซึ่ง $A \subseteq U$

ให้ $\varepsilon = \frac{\delta}{3}$ จากขั้นที่ 2 จะมี $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ที่ซึ่ง $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon)$

เนื่องจาก $\text{diam}(B(x_i; \varepsilon)) = 2\varepsilon = \frac{2\delta}{3} < \delta$ ดังนั้นจะมี $U_i \in \mathcal{C}$ ที่ซึ่ง $B(x_i; \varepsilon) \subseteq U_i$

ดังนั้นจึงได้ว่า $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^n U_i$ เพราะฉะนั้น X เป็นปริภูมิกระชับ $\square$

บทนิยาม 4.14 ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $E \subseteq X$ เราจะกล่าวว่า E เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded set) เมื่อ มีจำนวนจริง $M > 0$ ที่ซึ่ง $d(x, y) \leq M$ สำหรับทุกๆ $x, y \in X$ หรืออีกนัยหนึ่งก็คือ $\text{diam}(E)$ เป็นจำนวนจำกัด

บทนิยาม 4.15 ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $E \subseteq X$ เราจะกล่าวว่า E เป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วน (totally bounded set) เมื่อ ทุกๆจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ที่ซึ่ง

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon)$$

ทฤษฎีบทที่ 4.19 เซตที่มีขอบเขตทุกส่วนเป็นเซตที่มีขอบเขต

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วน ดังนั้น จะมี $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ที่ซึ่ง

$$X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i; 1)$$

ให้ $M = \max\{d(x_i, x_j) \mid i, j = 1, 2, \dots, n\} + 2$

ให้ $x, y \in X$ เนื่องจาก $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i; 1)$ ดังนั้นจะมี $i_0, j_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ ที่ซึ่ง

$x \in B(x_{i_0}; 1)$ และ $y \in B(x_{j_0}; 1)$ เพราะฉะนั้น X เป็นเซตที่มีขอบเขต □

ตัวอย่าง 4.8 บทกลับของทฤษฎีบทที่ 4.19 ไม่จริง

พิจารณา $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ นิยามการวัดระยะทาง $\bar{d}$ ใหม่บน $\mathbb{R}$ ดังนี้

$$\bar{d}(x, y) = \min\{1, |a - b|\} \quad \text{ทุกๆ } a, b \in \mathbb{R}$$

เราจะได้ว่า $(\mathbb{R}, \bar{d})$ เป็นปริภูมิที่มีขอบเขต แต่ไม่ใช่ปริภูมิที่มีขอบเขตทุกส่วน เนื่องจากเราไม่

สามารถปกคลุม $\mathbb{R}$ ได้ด้วยบอลเปิดที่มีรัศมี $\frac{1}{2}$ จำนวนจำกัด

ทฤษฎีบทที่ 4.20 เซตย่อยของเซตที่มีขอบเขตทุกส่วน เป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วน

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดจากนิยาม □

เราสังเกตว่า $(\mathbb{R}, d_{\text{usual}})$ เป็นปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์แต่ไม่ใช่เซตที่มีขอบเขตทุกส่วน ส่วนช่วงเปิด $(-1, 1)$ เป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วนแต่ไม่ใช่ปริภูมิที่บริบูรณ์ และสำหรับช่วงปิด $[-1, 1]$ เป็นทั้งเซตที่มีขอบเขตทุกส่วนและปริภูมิที่บริบูรณ์ ดังนั้นเงื่อนไขของการที่เป็นปริภูมิบริบูรณ์กับการเป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วน ไม่ได้ขึ้นต่อกัน

ทฤษฎีบทต่อไปแสดงความสมมูลระหว่างการเป็นเซตกระชับ ความมีขอบเขตทุกส่วน และความบริบูรณ์บนปริภูมิอิงระยะทาง

ทฤษฎีบทที่ 4.21 ให้ X เป็นปริภูมิอิงระยะทาง แล้วจะได้ว่า

X เป็นปริภูมิกระชับ ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิบริบูรณ์ และมีขอบเขตทุกส่วน

บทพิสูจน์ สมมติให้ X เป็นปริภูมิกระชับ ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.18 X เป็นปริภูมิกระชับจุดลิมิต และโดยบทแทรกที่ 1.15 X เป็นปริภูมิบริบูรณ์

ให้ $\varepsilon > 0$ เราจะได้ว่า $\{B(x; \varepsilon) \mid x \in X\}$ เป็นเซตปกเปิดของ X เนื่องจาก X เป็นปริภูมิกระชับ ดังนั้นจึงมี $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ที่ซึ่ง $X = \bigcup_{i=1}^n B(x_i; \varepsilon)$ นั่นคือ X เป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วน

ในทางกลับกัน สมมติให้ X เป็นปริภูมิบริบูรณ์ และมีขอบเขตทุกส่วน จะแสดงว่า X เป็นเซตกระชับแบบลำดับ และ โดยทฤษฎีบทที่ 4.18 จะได้ว่า X เป็นเซตกระชับให้ (x_n) เป็นลำดับใดๆใน X ต่อไปเราจะพยายามสร้างลำดับย่อยที่ลู่อัดต่อไปนี้

ขั้นแรก เนื่องจาก X เป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วน ดังนั้นเราจะปกคลุม X ด้วยบอลเปิดรัศมี 1 จำนวนจำกัด ดังนั้นจะมีบอลเปิดอยู่หนึ่งอันเรียกว่า B_1 ที่ซึ่งจะมี $x_n \in B_1$ เป็นจำนวนอนันต์ตัวให้ $J_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B_1\}$

ขั้นต่อไป เราจะคลุม X ด้วยบอลเปิดรัศมี $\frac{1}{2}$ จำนวนจำกัด ในทำนองเดียวกันนั้นจะมีบอลเปิดอยู่หนึ่งอันเรียกว่า B_2 ที่ซึ่งจะมี $x_n \in B_2$ เป็นจำนวนอนันต์ตัวให้ $J_2 = \{n \in J_1 \mid x_n \in B_2\}$ สังเกตว่า ให้ $J_2 \subseteq J_1$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ สำหรับ $m > 1$ เราจะมีบอลเปิดรัศมี $\frac{1}{m}$ เรียกว่า B_m และเซตดัชนี $J_m = \{n \in J_{m-1} \mid x_n \in B_m\}$ สังเกตว่า $J_m \subseteq J_{m-1} \subseteq \dots \subseteq J_2 \subseteq J_1$ เลือก $n_1 \in J_1$ และสำหรับ $k \in \mathbb{N}$ เลือก $n_k \in J_k$ ดังนั้นเราจะได้ว่า สำหรับ $i, j \geq k$ เราจะมีว่า $x_{n_i}, x_{n_j} \in B_k$ เพราะว่า $J_i, J_j \subseteq J_k$

เพราะฉะนั้น เราจะได้ว่า $d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq \frac{2}{k}$

โดยหลักของอาร์คิมิดีส เราสามารถแสดงได้ว่าลำดับย่อย (x_{n_i}) เป็นลำดับโคซี ในปริภูมิที่บริบูรณ์ X ดังนั้นจึงเป็นลำดับลู่อัด นั่นคือ เราได้แสดงแล้วว่า X เป็นปริภูมิกระชับแบบลิมิต $\square$

หมายเหตุ สำหรับเซตย่อย A ใน $(\mathbb{R}^n, d_{\text{usual}})$ เรามีว่า

A เป็นเซตที่มีขอบเขต ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วน (ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด)

บทแทรกที่ 4.22 (Heine-Borel Theorem)

ให้ $E \subseteq (\mathbb{R}^n, d_{\text{usual}})$ แล้วจะได้ว่า

E เป็นเซตกระชับ ก็ต่อเมื่อ E เป็นเซตปิด และ มีขอบเขต

บทพิสูจน์ สมมติให้ E เป็นเซตกระชับ โดยทฤษฎีบทที่ 4.21 ได้ว่า E เป็นปริภูมิบริบูรณ์ และมีขอบเขตทุกส่วน ดังนั้น E เป็นเซตปิด และมีขอบเขต โดยทฤษฎีบทที่ 1.18 และ 4.19

ในทางกลับกัน สมมติให้ E เป็นเซตปิด และมีขอบเขต เนื่องจาก E เป็นเซตปิดในปริภูมิบริบูรณ์ $\mathbb{R}$ โดยทฤษฎีบทที่ 1.17 เราได้ว่า E เป็นปริภูมิบริบูรณ์ และโดยหมายเหตุข้างต้น E เป็นเซตที่มีขอบเขตทุกส่วน เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.21 E เป็นเซตกระชับ $\square$

บทแทรกที่ 4.23 (ทฤษฎีบทค่าสุดขีด : Extreme Value Theorem)

ถ้า $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว จะมี $c, d \in [a, b]$

ที่ซึ่ง $f(x) \leq f(c)$ และ $f(x) \geq f(d)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$

บทพิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $[a, b]$ เป็นเซตกระชับจากบทแทรกที่ 4.22 ดังนั้น $f([a, b])$ เป็นเซตกระชับใน $\mathbb{R}$ ด้วย

สมมติว่าไม่มี $c \in [a, b]$ ที่ซึ่ง $f(x) \leq f(c)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$

พิจารณา $\{(-\infty, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$ ต่อไปจะแสดงว่า $\bigcup_{x \in [a, b]} (-\infty, f(x)) \geq f([a, b])$

ให้ $z \in f([a, b])$ จะได้ว่ามี $x_0 \in [a, b]$ ที่ซึ่ง $f(x_0) = z$

สมมติว่า $z \notin \bigcup_{x \in [a, b]} (-\infty, f(x))$ ดังนั้น $f(x_0) = z \geq f(x)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$

ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับที่สมมติไว้ข้างต้น ดังนั้น $z \in \bigcup_{x \in [a, b]} (-\infty, f(x))$

นั่นคือ $\bigcup_{x \in [a, b]} (-\infty, f(x)) \geq f([a, b])$ เพราะฉะนั้น $\{(-\infty, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$ เป็นเซตปกเปิด

ของ $f([a, b])$ และเนื่องจาก $f([a, b])$ เป็นเซตกระชับ ดังนั้นจะมี $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$ ที่ซึ่ง

$$f([a, b]) \subseteq (-\infty, f(x_1)) \cup (-\infty, f(x_2)) \cup \dots \cup (-\infty, f(x_n))$$

โดยไม่เสียใจทั่วไปสมมติให้ $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \dots \leq f(x_n)$ ดังนั้น

$$f([a, b]) \subseteq \bigcup_{i=1}^n (-\infty, f(x_i)) = (-\infty, f(x_n))$$

เพราะฉะนั้น $x_n \in [a, b]$ และ $f(x) \leq f(x_n)$ สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$

เกิดข้อขัดแย้งกับสมมติฐาน

ในทำนองเดียวเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า มี $d \in [a, b]$ ที่ซึ่ง $f(x) \leq f(d)$

สำหรับทุกๆ $x \in [a, b]$



แบบฝึกหัดประจำบทที่ 4

1. ให้ τ และ τ' เป็นทอพอโลยีบน X ถ้า $\tau' \subseteq \tau$ แล้วเราสรุปอะไรได้บ้างเกี่ยวกับความเชื่อมโยงบนเซต X เทียบกับทอพอโลยีหนึ่งไปยังอีกทอพอโลยีหนึ่ง
2. จงพิจารณาว่าจริงหรือไม่ที่ ถ้า X เป็นเซตที่เชื่อมโยง แล้วทุกๆเซตย่อยแท้ A ที่ไม่ว่างของ X แล้วเราจะได้ว่า $\partial A \neq \emptyset$ โดยที่ $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$
บทกลับของข้อความข้างต้นเป็นจริงหรือไม่
3. ให้ $A \subseteq X$ จงแสดงว่า ถ้า C เป็นเซตย่อยของ X ที่ซึ่ง $C \cap A \neq \emptyset$ และ $C \cap (X - A) \neq \emptyset$ แล้ว $C \cap \partial A \neq \emptyset$
4. ให้ X และ Y เป็นปริภูมิทอพอโลยีที่เชื่อมโยง โดยที่ $Y \subseteq X$ จงแสดงว่า ถ้า A และ B เป็นการแบ่งแยก (separation) ของ $X - Y$ แล้ว $Y \cup A$ และ $Y \cup B$ เป็นเซตเชื่อมโยง
5. ให้ τ และ τ' เป็นทอพอโลยีบน X ถ้า $\tau' \subseteq \tau$ แล้วเราสรุปอะไรได้บ้างเกี่ยวกับความกระชับบนเซต X เทียบกับทอพอโลยีหนึ่งไปยังอีกทอพอโลยีหนึ่ง
6. จงแสดงว่าทุกยูเนียนจำนวนจำกัดของเซตกระชับเป็นเซตกระชับ
7. จงแสดงว่าทุกๆเซตย่อยของ $\mathbb{R}$ เป็นเซตกระชับ ภายใต้ทอพอโลยี
 $\tau_{\text{finite}} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - A \text{ เป็นเซตจำกัด หรือ } \mathbb{R} - A = \mathbb{R}\}$
8. จงพิจารณาว่า $[0,1]$ เป็นเซตกระชับใน $\mathbb{R}$ หรือไม่ภายใต้ทอพอโลยี
 $\tau_{\text{count}} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} - A \text{ เป็นเซตนับได้ หรือ } \mathbb{R} - A = \mathbb{R}\}$
พร้อมทั้งอธิบายเหตุผล

บทที่ 5 สัจพจน์การนับได้และการแยกกันได้ (Countability and Separation Axioms)

จากการศึกษาในบทก่อนหน้านี้เราคงได้เห็นถึงความคล้ายคลึง ความแตกต่างระหว่างปริภูมิอิงระยะทางและปริภูมิทอพอโลยี ปัญหาหนึ่งที่นักทอพอโลยีสนใจก็คือ เมื่อใดที่ปริภูมิทอพอโลยีถึงจะเป็นปริภูมิที่วัดระยะทางได้ (metrizable) จึงมีการพัฒนาเครื่องมือในการหาคำตอบดังกล่าว ซึ่งต้องอาศัยสัจพจน์ที่กล่าวต่อไปในบทนี้ ดังต่อไปนี้

1. สัจพจน์การนับ (countability axioms)

บทนิยาม 5.1 ปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่ามี ฐานหลักจำนวนนับได้ที่จุด $x \in X$ (countable basis at x) ก็ต่อเมื่อ มีกลุ่มนับได้ $\mathcal{B}_x$ ของเซตย่อยของ X ที่ซึ่ง ทุกๆเซตย่อยเปิด U ที่คลุม x จะมี $B \in \mathcal{B}_x$ ที่ซึ่ง $x \in B \subseteq U$

บทนิยาม 5.2 เซตย่อย A ของปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่ามี หนาแน่น (dense) ใน X ก็ต่อเมื่อ $\bar{A} = X$

ตัวอย่าง 5.1 พิจารณา $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ เราจะได้ว่า

1. $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$
2. $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$
3. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
4. $\overline{\mathbb{Q}^c} = \mathbb{R}$

ดังนั้น $\mathbb{Q}$ และ $\mathbb{Q}^c$ หนาแน่นใน $\mathbb{R}$ แต่ $\mathbb{N}$ และ $\mathbb{Z}$ ไม่หนาแน่นใน $\mathbb{R}$

บทนิยาม 5.3 ให้ X เป็นปริภูมิทอพอโลยี

1. เราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 1 (first countable) ก็ต่อเมื่อ X มี ฐานหลักจำนวนนับได้ที่ทุกๆจุด $x \in X$
2. เราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 2 (second countable) ก็ต่อเมื่อ X มี ฐานหลักสำหรับทอพอโลยีจำนวนนับได้
3. เราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิแยกกันได้ (separable) ก็ต่อเมื่อ X มีเซตย่อยจำนวนนับได้ที่หนาแน่นใน X

ทฤษฎีบทที่ 5.1 ปริภูมินับได้แบบที่ 2 เป็น ปริภูมินับได้แบบที่ 1 และปริภูมิแยกกันได้

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 2 พร้อมกับฐานหลักสำหรับทอพอโลยีจำนวนนับได้

$$\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$$

ให้ $x \in X$ และ นิยาม $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\} \subseteq \mathcal{B}$ ดังนั้นเราจะได้ว่า $\mathcal{B}_x$ เป็นเซตนับได้ และ เนื่องจาก $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักของ X เพราะนั้นสำหรับทุกๆ เซตเปิด U ที่คลุม x จะมี $B \in \mathcal{B}$ ที่ซึ่ง $x \in B \subseteq U$ ดังนั้น $B \in \mathcal{B}_x$ นั่นคือ X เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 1

สำหรับแต่ละ $B_i \in \mathcal{B}$ เราจะเลือก $x_i \in B_i$ (โดยสัจพจน์การเลือก) และให้ $D = \{x_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ ดังนั้น D เป็นเซตนับได้ ต่อไปเราจะแสดงว่า D หนาแน่นใน X ให้ $x \in X$ และเซตเปิด U ที่คลุม x เนื่องจาก $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักของ X ดังนั้นจะมี $B_x \in \mathcal{B}$ ที่ซึ่ง $x \in B_x \subseteq U$ แล้วสังเกตว่า $B_x = B_{i_0}$ สำหรับบาง $i_0 \in \{1, 2, 3, \dots\}$ เพราะฉะนั้น $x_{i_0} \in B_{i_0} \cap D \subseteq U \cap D$ นี่ชี้ให้เห็นว่า $U \cap D \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้น $X = \overline{D}$ □

ตัวอย่าง 5.2 $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 2 พร้อมกับฐานหลักสำหรับทอพอโลยีจำนวนนับได้คือ

$$\mathcal{B} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทข้างต้นเราจะได้ว่า $\mathbb{R}$ เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 1 และ ปริภูมิแยกกันได้

ทฤษฎีบทที่ 5.2 ถ้า X เป็นปริภูมินับได้แบบที่สอง และให้ A เป็นปริภูมิย่อยวิยุต แล้วจะได้ว่า A เป็นเซตนับได้

บทพิสูจน์ ให้ $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักจำนวนนับได้ของ X

สังเกตว่า แต่ละ $a \in A$, $\{a\}$ เป็นเซตเปิดใน A

เนื่องจาก $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักของ X ดังนั้นจะมี $B_a \in \mathcal{B}$ ที่ซึ่ง $a \in B_a \cap A \subseteq \{a\}$

นั่นชี้ให้เห็นว่า $B_a \cap A = \{a\}$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $a, b \in A$ ที่ซึ่ง $a \neq b$ จะได้ว่า $B_a \neq B_b$ เพราะฉะนั้นเราสามารถสร้าง

ฟังก์ชัน $\alpha : A \rightarrow \mathcal{B}$ นิยามโดย $\alpha(a) = B_a$ จะเห็นได้ว่า α เป็นการส่งแบบ 1-1

เนื่องจาก $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักจำนวนนับได้ ดังนั้น A จึงเป็นเซตนับได้ □

ตัวอย่าง 5.3 ให้ $\mathbb{R}_\ell = (\mathbb{R}, \tau_\ell)$ เป็นปริภูมิทอพอโลยี โดยที่ τ_ℓ เป็น ทอพอโลยีที่ก่อกำเนิดจากฐานหลัก $\mathcal{B}_\ell = \{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$

1. สำหรับแต่ละ $x \in \mathbb{R}_\ell$ เราได้ว่า $\mathcal{B}_x = \{[x, x + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ เป็นฐานหลักที่ x ดังนั้น $\mathbb{R}_\ell$ เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 1
2. เนื่องจาก $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}_\ell$ ดังนั้นได้ว่า $\mathbb{R}_\ell$ เป็นปริภูมิแบบแยกกันไม่ได้
3. ให้ $\mathcal{B}$ เป็นฐานหลักใดๆของ $\mathbb{R}_\ell$ ให้ $x \in \mathbb{R}_\ell$ และเลือก $B_x \in \mathcal{B}$ ที่ซึ่ง $x \in B_x \subseteq [x, x + 1)$
 เพราะฉะนั้น สำหรับ $x, y \in \mathbb{R}_\ell, x \neq y$ จะมี $B_x, B_y \in \mathcal{B}$ ที่ซึ่ง $x \in B_x \subseteq [x, x + 1)$ และ $y \in B_y \subseteq [y, y + 1)$ ดังนั้น $\inf B_x \neq \inf B_y \Rightarrow B_x \neq B_y$
 นั่นคือ $\mathcal{B}$ เป็นเซตนับไม่ได้ เพราะฉะนั้น $\mathbb{R}_\ell$ ไม่เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 2

บทนิยาม 5.4 เราจะกล่าวว่าปริภูมิทอพอโลยี (X, τ) เป็นปริภูมิวัดระยะทางได้ (metrizable) ก็ต่อเมื่อ เราสามารถนิยามการวัดระยะทาง(metric) d บน X โดยที่ทอพอโลยี τ ถูกก่อกำเนิดโดย d กล่าวคือ $\tau_d = \tau$

ตัวอย่าง 5.4

1. $(\mathbb{R}, \tau_{\text{usual}})$ เป็นปริภูมิที่มีการวัดระยะทางโดยที่ถูกก่อกำเนิดโดยการวัดระยะทาง

$$d_{\text{usual}}(x, y) = |x - y| \quad \text{ทุก } x, y \in \mathbb{R}$$

2. ปริภูมิวิยุต $(X, P(X))$ เป็นปริภูมิที่มีการวัดระยะทางโดยที่ถูกก่อกำเนิดโดยการวัดระยะทาง

$$d_{\text{dis}}(x, y) = \begin{cases} 0 & ; x = y \\ 1 & ; x \neq y \end{cases} \quad \text{ทุก } x, y \in X$$

ทฤษฎีบทที่ 5.3 ถ้า X เป็นปริภูมิที่มีการวัดระยะทาง แล้ว X เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 1

บทพิสูจน์ ให้ $x \in X$ และนิยาม $\mathcal{B}_x = \{B(x; \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\}$

โดยที่ $B(x; \frac{1}{n})$ คือบอลเปิดจุดศูนย์กลางที่ x รัศมี $\frac{1}{n}$

เราแสดงได้ไม่ยากว่า $\mathcal{B}_x$ เป็นฐานหลักที่ x จำนวนนับได้ ดังนั้น X เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 1 $\square$

หมายเหตุ ถ้า X ไม่เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 1 แล้ว X ไม่เป็นปริภูมิที่มีการวัดระยะทาง

ตัวอย่าง 5.5 ให้ $\mathbb{R}^\omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots$ ผลคูณคาร์ทีเซียนจำนวนอนันต์นับได้ของ $\mathbb{R}$ (countable product of $\mathbb{R}$) เป็นปริภูมิทอพอโลยีที่มีการวัดระยะทางแบบเอกรูป ρ (นิยามในแบบฝึกหัดชุดที่ 1) เราจะได้ว่า $\mathbb{R}^\omega$ เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 1 โดยทฤษฎีบทที่ 5.3

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\mathbb{R}^\omega$ ไม่ใช่ปริภูมินับได้แบบที่ 2

สมมติ $\mathbb{R}^\omega$ เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 2

พิจารณา $A = \{(x_i) \in \mathbb{R}^\omega \mid x_i = 0 \text{ หรือ } 1\}$ ดังนั้น A จึงเป็นเซตนับไม่ได้

เราจะได้ว่า สำหรับ $x, y \in A$, $\rho(x, y) = 1$ ซึ่งชี้ให้เห็นว่า A เป็นปริภูมิวิยุต

โดยทฤษฎีบทที่ 5.2 จะได้ว่า A ต้องเป็นเซตนับได้ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $\mathbb{R}^\omega$ ไม่ใช่ปริภูมินับได้แบบที่ 2

ทฤษฎีบทที่ 5.4 ให้ X เป็นปริภูมิที่มีการวัดระยะทาง แล้วเราจะได้ว่า
 X เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 2 ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิแยกกันได้

บทพิสูจน์

($\Rightarrow$) เห็นได้ชัดจากทฤษฎีบทที่ 5.1

($\Leftarrow$) สมมติให้ X เป็นปริภูมิแยกกันได้ โดยที่ A เป็นเซตนับได้ที่หนาแน่นใน X

ให้ $\mathcal{S} = \{B(a; q) \mid a \in A, q \in \mathbb{Q}\}$ ดังนั้น $\mathcal{S}$ เป็นเซตนับได้

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\mathcal{S}$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีบน X

ให้ U เป็นเซตเปิดใดๆใน X และ ให้ $x \in U$ ดังนั้นจะมี $\varepsilon > 0$ ที่ซึ่ง

$$x \in B(x; \varepsilon) \subseteq U$$

เนื่องจาก $x \in X = \overline{A}$ และ $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ ดังนั้นจะมี $a_0 \in A$ ที่ซึ่ง $a_0 \in B(x; \frac{\varepsilon}{3})$

และเนื่องจาก $\mathbb{Q}$ หนาแน่นใน $\mathbb{R}$ จึงมี $q \in \mathbb{Q}$ ที่ซึ่ง $\frac{\varepsilon}{3} < q < \frac{2\varepsilon}{3}$

ต่อไปเราจะแสดงว่า $x \in B(a_0; q)$ และ $B(a_0; q) \subseteq B(x; \varepsilon)$

เนื่องจาก $a_0 \in B(x; \frac{\varepsilon}{3})$ ดังนั้น $d(a_0, x) < \frac{\varepsilon}{3} < q$ นั่นคือ $x \in B(a_0; q)$

ให้ $z \in B(a_0; q)$ ดังนั้น $d(z, a_0) < q$ จึงได้ว่า

$$d(z, x) \leq d(z, a_0) + d(a_0, x) < q + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

จึงได้ว่า $z \in B(x; \varepsilon)$ หรือ $B(a_0; q) \subseteq B(x; \varepsilon)$

โดย ทฤษฎีบทที่ 2.3 เราได้แสดงแล้วว่า $\mathcal{S}$ เป็นฐานหลักสำหรับทอพอโลยีบน X □

ต่อไปจะกล่าวถึงบทนิยามของลำดับลู่เข้าบนปริภูมิทอพอโลยีซึ่งมีความคล้ายคลึงกับลำดับลู่เข้าบนปริภูมิอิงระยะทางดังนี้

บทนิยาม 5.5 ลำดับ (a_n) ในปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่า (a_n) เป็นลำดับลู่เข้า (convergence sequence) สู่จุด $a_\infty \in X$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ เซตเปิด U จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับทุก $n \geq N$ เราจะได้ว่า $a_n \in U$

บทตั้งที่ 5.5 (บทตั้งลำดับ: The Sequence Lemma)

ให้ X เป็นปริภูมิทอพอโลยีและ $A \subseteq X$ ถ้า (a_n) เป็นลำดับใน A ที่ลู่เข้าหาค่า $a_\infty \in X$ แล้วเราจะได้ว่า $a_\infty \in \bar{A}$

บทพิสูจน์ ให้ U เป็นเซตเปิดใดๆ ที่คลุม a_∞ นั่นคือ $a_\infty \in U$ เนื่องจาก $a_n \rightarrow a_\infty$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ ดังนั้นจะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่งสำหรับ $n \geq N \Rightarrow a_n \in U$ โดยเฉพาะอย่างยิ่งที่ N จะได้ว่า $a_N \in U$ เพราะฉะนั้น $U \cap A \neq \emptyset$ นั่นคือ $a_\infty \in \bar{A}$ $\square$

ทฤษฎีบทที่ 5.6 บทกลับของทฤษฎีบทที่ 5.5 เป็นจริง ถ้า X ปริภูมินับได้แบบที่ 1

บทพิสูจน์ สมมติให้ X ปริภูมินับได้แบบที่ 1 ให้ $a \in \bar{A} \subseteq X$ เนื่องจาก X ปริภูมินับได้แบบที่ 1

ดังนั้นจะมีฐานหลัก $\mathcal{B}_a = \{B_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ที่ a จำนวนนับได้

ต่อไปเราจำทำการปรับปรุงฐานหลัก B_a ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{ให้ } B'_1 &= B_1 \\ B'_2 &= B_1 \cap B_2 \\ B'_3 &= B_1 \cap B_2 \cap B_3 \\ &\vdots \\ B'_n &= B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น เราแสดงได้ไม่ยากว่า $\mathcal{B}'_a = \{B'_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ จะเป็นฐานหลักที่ a ตัวใหม่ ซึ่งมีสมบัติ

ว่า สำหรับ $i > j$, $B'_i \subseteq B'_j$

เนื่องจาก $a \in \bar{A}$ ดังนั้นแต่ละ $i \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า $B'_i \cap A \neq \emptyset$ เพราะฉะนั้นให้ $a_i \in B'_i \cap A$ นั้น

คือเราได้ทำการสร้างลำดับ (a_i) ใน A

ให้ U เป็นเซตเปิดใดๆ ที่คลุม a ดังนั้นจะมี $B'_N \in \mathcal{B}_a'$ สำหรับบาง $N \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง

$a \in B'_N \subseteq U$ แต่จากนิยามของ $\mathcal{B}_a'$ เราจะได้ว่า สำหรับ

$$n \geq N \Rightarrow a_n \in B_n \subseteq B'_n \subseteq U$$

นั่นคือ $a_n \rightarrow a$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ □

จากบทพิสูจน์ในทฤษฎีบทที่ 5.6 เราจะสังเกตเห็นว่าในการสร้างลำดับเพื่อให้ลู่อู่เข้าสู่จุดซึ่งอยู่ในส่วนปิดคลุมนั้นเราต้องการสมาชิกในฐานหลักที่มีการจัดเรียงที่ดี นั่นคือเหตุผลว่าทำไมทฤษฎีบทถึงเป็นจริงสำหรับปริภูมินับได้แบบที่ 1

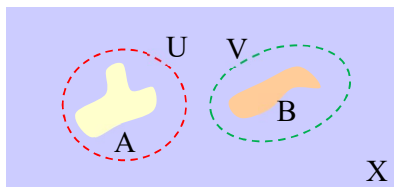
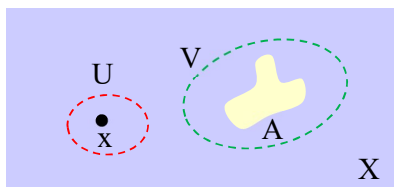
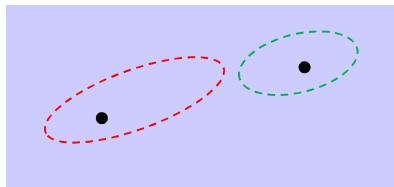
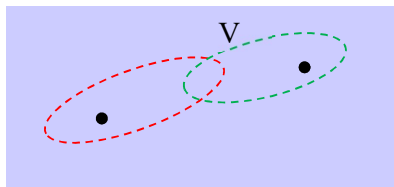
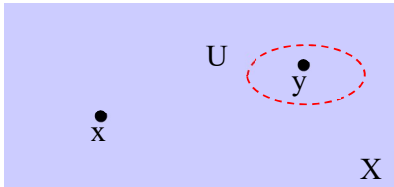
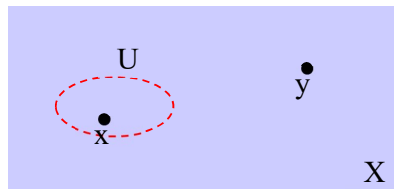
อีกหนึ่งเหตุผลสำคัญที่เราไม่นิยมพูดถึงลำดับที่ลู่อู่เข้าบนปริภูมิทอพอโลยีนั่นเพราะพฤติกรรมการลู่อู่เข้าของลำดับลู่อู่เข้าอาจจะมีลิมิตได้มากกว่า 1 จุด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.6 พิจารณาปริภูมิอียูคลิด (X, τ_{indis}) ให้ $x \in X$ เป็นจุดใดๆ เราจะได้ว่า สำหรับลำดับ (x_n) ใดๆ ใน X ได้ว่า $x_n \rightarrow x$ เมื่อ $n \rightarrow \infty$ กล่าวคือ ลำดับ (x_n) ใดๆ ใน X ลู่อู่เข้าสู่จุดทุกจุดใน X

2. สัจพจน์การแบ่งแยก (separation axioms)

บทนิยาม 5.6

1. ปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่า เป็นปริภูมิ T_0 ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x, y \in X$ จะมีเซตเปิด U ที่ซึ่ง $x \in U$ แต่ $y \notin U$ หรือ $y \in U$ แต่ $x \notin U$
2. ปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่า เป็นปริภูมิ T_1 ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x, y \in X$ จะมีเซตเปิด U และ V ที่ซึ่ง $x \in U$ แต่ $y \notin U$ และ $y \in V$ แต่ $x \notin V$
3. ปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่า เป็น ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ (Hausdorff space) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x, y \in X$ จะมีเซตเปิด U และ V ที่ซึ่ง $x \in U$, $y \in V$ โดยที่ $U \cap V = \emptyset$ และเราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิ T_2 ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิ T_1 และ ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ
4. ปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่า เป็น ปริภูมิสม่ำเสมอ (regular space) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x \in X$ และเซตปิด $A \subseteq X$ ซึ่ง $x \notin A$ จะมีเซตเปิด U และ V ที่ซึ่ง $x \in U$, $A \subseteq V$ โดยที่ $U \cap V = \emptyset$
และเราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิ T_3 ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิ T_1 และ ปริภูมิสม่ำเสมอ
5. ปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่า เป็น ปริภูมิสม่ำเสมอแบบบริบูรณ์ (completely regular space) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $x \in X$ และเซตปิด $A \subseteq X$ ซึ่ง $x \notin A$ จะมีฟังก์ชันต่อเนื่อง $f : X \rightarrow [0, 1]$ ที่ซึ่ง $f(x) = 0$ และ $f(A) = \{1\}$
และเราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิ $T_{3\frac{1}{2}}$ ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิ T_1 และ ปริภูมิสม่ำเสมอแบบบริบูรณ์
6. ปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่า เป็น ปริภูมิปรกติ (normal space) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆเซตปิด $A, B \subseteq X$ ซึ่ง $A \cap B = \emptyset$ จะมีเซตเปิด U และ V ที่ซึ่ง $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ โดยที่ $U \cap V = \emptyset$
และเราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิ T_4 ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิ T_1 และ ปริภูมิปรกติ
7. ปริภูมิทอพอโลยี X จะกล่าวว่า เป็น ปริภูมิปรกติแบบบริบูรณ์ (completely normal space) ก็ต่อเมื่อ ทุกๆเซต $A, B \subseteq X$ ซึ่ง $\bar{A} \cap B = \emptyset$ และ $A \cap \bar{B} = \emptyset$ จะมีเซตเปิด U และ V ที่ซึ่ง $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ โดยที่ $U \cap V = \emptyset$
และเราจะกล่าวว่า X เป็นปริภูมิ T_5 ก็ต่อเมื่อ X เป็นปริภูมิ T_1 และ ปริภูมิปรกติแบบบริบูรณ์



X เป็นปริภูมิ T_0

X เป็นปริภูมิ T_1

X เป็นปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ

X เป็นปริภูมิสม่ำเสมอ

X เป็นปริภูมิปรกติ

ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่ช่วยในการตรวจสอบว่าปริภูมิทอพอโลยีที่กำหนดให้ เป็นปริภูมิที่สอดคล้องสัจพจน์ $T_0 - T_5$ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 5.7 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิ T_0 ก็ต่อเมื่อ $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ สำหรับทุกๆ $x, y \in X$ ที่แตกต่างกัน

บทพิสูจน์ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด



ทฤษฎีบทที่ 5.8 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิ T_1 ก็ต่อเมื่อ $\{x\}$ เป็นเซตปิด สำหรับทุกๆ $x \in X$

บทพิสูจน์

($\Rightarrow$) สมมติให้ X เป็นปริภูมิ T_1 และให้ $x \in X$

เราต้องการจะแสดงว่า $\{x\}$ เป็นเซตปิด นั่นคือต้องแสดงว่า $X - \{x\}$ เป็นเซตเปิด

ให้ $y \in X - \{x\}$ ดังนั้น $x \neq y$ จากการที่ X เป็นปริภูมิ T_1 จะมี เซตเปิด V ที่ซึ่ง $y \in V$

แต่ $x \notin V$ ดังนั้น $y \in V \subseteq X - \{x\}$

นั่นคือ $X - \{x\}$ เป็นเซตเปิด หรือ $\{x\}$ เป็นเซตปิดนั่นเอง

($\Leftarrow$) ให้ $x, y \in X$ ที่ซึ่ง $x \neq y$

เลือก $U_x = X - \{y\}$ ดังนั้นจะได้ว่า U_x เป็นเซตเปิดซึ่ง $x \in U_x$ แต่ $y \notin U_x$

ในทำนองเดียวกัน เลือก $U_y = X - \{x\}$ ดังนั้นจะได้ว่า U_y เป็นเซตเปิดซึ่ง $y \in U_y$ แต่ $x \notin U_y$ เพราะฉะนั้น X เป็นปริภูมิ T_1 $\square$

บทแทรกที่ 5.9 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิ T_1 ก็ต่อเมื่อ ทุกๆเซตจำกัดย่อยของ X เป็นเซตปิด

บทพิสูจน์ สังเกตว่าทุกเซตจำกัด $A \subseteq X$ โดยที่ $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ สามารถเขียนได้ในรูป

$$A = \bigcup_{i=1}^n \{a_i\}$$

โดยทฤษฎีบทที่ 5.8 และนิยามของทอพอโลยีบน X เราสามารถพิสูจน์บทแทรกนี้ได้ไม่ยาก $\square$

ข้อสังเกต จากบทนิยาม 5.6 และ ทฤษฎีบทที่ 5.8 เราจะสังเกตได้ว่า ปริภูมิ

$$T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

ทฤษฎีบทที่ 5.10 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิ T_2 ก็ต่อเมื่อ เซต $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$ เป็นเซตปิดใน $X \times X$

บทพิสูจน์

($\Rightarrow$) สมมติให้ X เป็นปริภูมิ T_2

เราต้องการจะแสดงว่า $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ เป็นเซตปิด

นั่นคือต้องแสดงว่า $X \times X - \Delta$ เป็นเซตเปิด

ให้ $(x, y) \in X \times X - \Delta$ ดังนั้น $x \neq y$ เนื่องจาก X เป็นปริภูมิ T_2 เพราะฉะนั้นจะมีเซตเปิด U_x และ V_y ที่คลุม x และ y ตามลำดับซึ่ง $U_x \cap V_y = \emptyset$

เพราะฉะนั้น $(x, y) \in U_x \times V_y \subseteq X \times X - \Delta$ นั่นคือ $X \times X - \Delta$ เป็นเซตเปิด

หรือ $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ เป็นเซตปิดนั่นเอง

($\Leftarrow$) ให้ $x, y \in X$ ที่ซึ่ง $x \neq y$ ดังนั้น $(x, y) \in X \times X - \Delta$ เนื่องจาก

$\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ เป็นเซตปิด ดังนั้น $X \times X - \Delta$ เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้นจะมี เซตเปิด U และ V ที่คลุม x และ y ตามลำดับซึ่ง

$$(x, y) \in U \times V \subseteq X \times X - \Delta$$

สมมติให้ $c \in U \cap V$ ดังนั้น $(c, c) \in U \times V$ และ $(c, c) \in \Delta$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $U \cap V = \emptyset$ เพราะฉะนั้น X เป็นปริภูมิ T_2 □

ตัวอย่าง 5.7

1. ปริภูมิเซียร์พินสกีร์ (Sierpinski space) ให้ $X = \{0, 1\}$ และ $\tau_S = \{\emptyset, \{0\}, X\}$ จะได้ว่า (X, τ_S) เป็นปริภูมิ T_0 แต่ไม่เป็นปริภูมิ T_1

2. ปริภูมิทอพอโลยีจำกัดร่วม (Cofinite space) ให้ X เป็นเซตอนันต์ใดๆ และ

$$\tau_{\text{cofinite}} = \{\emptyset, U \subseteq X \mid X - U \text{ เป็นเซตจำกัด}\}$$

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ จากนั้น เลือก $U = X - \{y\}$ และ $V = X - \{x\}$ แล้วจะได้ว่า $x \in U$ แต่ $y \notin U$ และ $y \in V$ แต่ $x \notin V$

นั่นคือ $(X, \tau_{\text{cofinite}})$ เป็นปริภูมิ T_1

ต่อไปจะแสดงว่า $(X, \tau_{\text{cofinite}})$ ไม่เป็นปริภูมิ T_2

ให้ $x, y \in X$ โดยที่ $x \neq y$ สมมติว่ามีเซตเปิด U และ V ที่ซึ่ง

$$x \in U, y \in V \text{ และ } U \cap V = \emptyset$$

เนื่องจาก $U \in \tau_{\text{cofinite}}$ และ $U \cap V = \emptyset$ ดังนั้น $X - U$ เป็นเซตจำกัด และ

$$V \subseteq X - U$$

ในทำนองเดียวกันเนื่องจาก $V \in \tau_{\text{cofinite}}$ และ X เป็นเซตอนันต์

ดังนั้น V ต้องเป็นเซตอนันต์ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ $V \subseteq X - U$

ดังนั้น $(X, \tau_{\text{cofinite}})$ ไม่เป็นปริภูมิ T_2

ทฤษฎีบทที่ 5.11 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิ T_3 ก็ต่อเมื่อ สำหรับแต่ละ $x \in X$ และเซตเปิด U ใดๆ ที่คลุม x จะมีเซตเปิด V ที่ซึ่ง $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

บทพิสูจน์

($\Rightarrow$) สมมติให้ X เป็นปริภูมิ T_3

ให้ $x \in X$ และเซตเปิด U ที่คลุม x ดังนั้น $A = X - U$ จะเป็นเซตปิด ซึ่ง $x \notin A$

เนื่องจาก X เป็นปริภูมิ T_3 ดังนั้นจะมีเซตเปิด V_x และ V_A ที่คลุม x และ A ตามลำดับ ซึ่ง

$$V_x \cap V_A = \emptyset$$

ดังนั้นเรามีว่า $x \in V_x \subseteq \bar{V}_x \subseteq \overline{X - V_A} = X - V_A \subseteq X - A = U$

($\Leftarrow$) ให้ $x \in X$ และเซตปิด $A \subseteq X$ ที่ซึ่ง $x \notin A$

ดังนั้น $U = X - A$ เป็นเซตเปิดซึ่งคลุม x

โดยสมมติฐานจะได้ว่าเซตเปิด V ที่ซึ่ง $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

ให้ $W = X - \bar{V}$ เราจะได้ว่า W เป็นเซตเปิดซึ่ง $V \cap W = \emptyset$ และ

$$A = X - (X - A) = X - U \subseteq X - \bar{V} = W$$

เพราะฉะนั้น X เป็นปริภูมิ T_3 □

ทฤษฎีบทที่ 5.12 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิ T_4 ก็ต่อเมื่อ สำหรับเซตปิด $A \subseteq X$ และเซตเปิด U ที่คลุม A จะมีเซตเปิด V ที่ซึ่ง $A \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$

บทพิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบทที่ 5.11 □

ทฤษฎีบทที่ 5.13 ปริภูมิทอพอโลยี X จะเป็นปริภูมิ T_5 ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆเซตย่อย $Y \subseteq X$ เป็นปริภูมิ T_4

บทพิสูจน์ ให้ $Y \subseteq X$ และให้ A, B เป็นเซตปิดใน Y ที่ซึ่ง $A \cap B = \emptyset$ ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\bar{A}_Y \cap \bar{B}_Y = A \cap B = \emptyset$$

โดยที่ $\bar{A}_Y$ และ $\bar{B}_Y$ แทนส่วนปิดของ A และ B ใน Y ตามลำดับ

เนื่องจากเรามีว่า $\bar{A}_Y = \bar{A}_X \cap Y$ และ

เมื่อ $\bar{A}_X$ และ $\bar{B}_X$ แทนส่วนปิดของ A และ B ใน X ตามลำดับ

ดังนั้น $\bar{A}_X \cap \bar{B}_X \cap Y = \bar{A}_Y \cap \bar{B}_Y = \emptyset$

เพราะฉะนั้น $\bar{A}_X \cap B = \bar{A}_X \cap B \cap Y \subseteq \bar{A}_X \cap \bar{B}_X \cap Y = \emptyset$ หรือ $\bar{A}_X \cap B = \emptyset$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า $A \cap \bar{B}_X = \emptyset$

โดยนิยามของปริภูมิ T_5 เราได้ว่า จะมีเซตเปิด U และ V ใน X ที่ซึ่ง $A \subseteq U$, $B \subseteq V$

และ $U \cap V = \emptyset$

นอกจากนั้น จะได้ว่า $A = A \cap Y \subseteq U \cap Y = U_Y$ ซึ่งเป็นเซตเปิดใน Y

และ $B = B \cap Y \subseteq V \cap Y = V_Y$ และได้อีกว่า

$$U_Y \cap V_Y = (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = (U \cap V) \cap Y = \emptyset$$

นั่นคือ Y เป็นปริภูมิ T_4

ในทางกลับกัน ให้ $A, B \subseteq X$ ที่ซึ่ง $\bar{A}_X \cap B = \emptyset$ และ $A \cap \bar{B}_X = \emptyset$

เมื่อ $\bar{A}_X$ และ $\bar{B}_X$ แทนส่วนปิดของ A และ B ใน X ตามลำดับ

$$\text{ให้ } Y = X - (\bar{A}_X \cap \bar{B}_X)$$

$$\text{สังเกตว่า } A \cap (\bar{A}_X \cap \bar{B}_X) = \bar{A}_X \cap (A \cap \bar{B}_X) = \emptyset$$

$$\text{ในการทำนองเดียวกันจะได้ว่า } B \cap (\bar{A}_X \cap \bar{B}_X) = \emptyset$$

ดังนั้น $A \subseteq Y$ และ $B \subseteq Y$ และ Y เป็นเซตเปิดใน X

ต่อไปเราจะแสดงว่า $\bar{A}_Y \cap \bar{B}_Y = \emptyset$ เมื่อ $\bar{A}_Y$ และ $\bar{B}_Y$ แทนส่วนปิดของ A และ B ใน Y ตามลำดับ

$$\text{เรามีว่า } \bar{A}_Y \cap \bar{B}_Y = \bar{A}_X \cap \bar{B}_X \cap Y = \emptyset \text{ นั่นคือ } \bar{A}_Y \cap \bar{B}_Y = \emptyset$$

โดยสมมติฐานเราได้ว่า จะมี เซตเปิด U และ V ใน Y ที่ซึ่ง $A \subseteq \bar{A}_Y \subseteq U$,

$$B \subseteq \bar{B}_Y \subseteq V \text{ และ } U \cap V = \emptyset \text{ แต่เนื่องจาก } Y \text{ เป็นเซตเปิดใน } X$$

ดังนั้น U และ V จึงเป็นเซตเปิดใน X ด้วย

นั่นคือเราได้แสดงแล้วว่า X เป็นปริภูมิ T_5 □

ทฤษฎีบทที่ 5.14 ปริภูมิอิงระยะทางเป็นปริภูมิ T_4

บทพิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตปิดใดๆใน X โดยที่ $A \cap B = \emptyset$

เนื่องจาก $X - B$ เป็นเซตเปิด และ $A \subseteq X - B$ ดังนั้นแต่ละ $a \in A$ จะมี $r_a > 0$ ที่ซึ่ง

$$B(a; r_a) \cap B = \emptyset$$

ในการทำนองเดียวกันได้ว่า แต่ละ $b \in B$ จะมี $r_b > 0$ ที่ซึ่ง $B(b; r_b) \cap A = \emptyset$

$$\text{ให้ } U = \bigcup_{a \in A} B(a; \frac{r_a}{2}) \text{ และ } V = \bigcup_{b \in B} B(b; \frac{r_b}{2}) \text{ เราจะได้ว่า } U \text{ และ } V \text{ เป็นเซตเปิดซึ่งคลุม}$$

A และ B ตามลำดับ

สมมติให้ $z \in U \cap V$ เราจะได้ว่ามี $a_0 \in A$ และ $b_0 \in B$ ที่ซึ่ง $z \in B(a_0; \frac{r_{a_0}}{2})$ และ

$$z \in B(b_0; \frac{r_{b_0}}{2}) \text{ หรือ } d(z, a_0) < \frac{r_{a_0}}{2} \text{ และ } d(z, b_0) < \frac{r_{b_0}}{2}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } d(a_0, b_0) \leq d(a_0, z) + d(z, b_0) < \frac{r_{a_0}}{2} + \frac{r_{b_0}}{2}$$

โดยไม่เสียยั่วทั่วไป สมมติให้ $r_{a_0} > r_{b_0}$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$d(a_0, b_0) < \frac{r_{a_0} + r_{b_0}}{2} < \frac{r_{a_0} + r_{a_0}}{2} = r_{a_0} \quad \text{นั่นคือ } b_0 \in B(a_0; r_{a_0}) \text{ ซึ่งขัดแย้ง}$$

เพราะฉะนั้น $U \cap V = \emptyset$ □

ทฤษฎีบทที่ 5.15 ปริภูมิ T_3 ที่เป็นปริภูมินับได้ในรูปแบบที่ 2 จะเป็นปริภูมิ T_4

บทพิสูจน์ ให้ X เป็นปริภูมิ T_3 ที่เป็นแบบนับได้ในรูปแบบที่ 2 พร้อมทั้งฐานหลักสำหรับทอพอโลยีจำนวนนับได้ $\mathcal{A}$

ให้ A และ B เป็นเซตปิดใน X ซึ่ง $A \cap B = \emptyset$ ดังนั้นจะได้ว่า

สำหรับแต่ละ $a \in A$ จะได้ว่า $X - B$ เป็นเซตเปิดซึ่ง $a \in X - B$

เนื่องจาก X เป็น ปริภูมิ T_3 โดยทฤษฎีบทที่ 5.11 จะมีเซตเปิด V ที่ซึ่ง

$$a \in V \subseteq \bar{V} \subseteq X - B$$

จากนั้นเราก็เลือกสมาชิก U_a ใน $\mathcal{A}$ ที่ซึ่ง $a \in U_a \subseteq V$ เพราะฉะนั้น $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a$

เนื่องจาก $\mathcal{A}$ เป็นเซตนับได้ ดังนั้น $A \subseteq \bigcup_{a \in A} U_a = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ โดยที่ $U_i \in \mathcal{A}$ และ

$$\bar{U}_i \subseteq X - B \quad \text{ทุกๆ } i$$

ในการทำงานเดียวกันเราได้ว่าจะมี $\{V_j \mid j = 1, 2, \dots\} \subseteq \mathcal{A}$ ที่ซึ่ง $B \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ และ

$$\bar{V}_j \subseteq X - A \quad \text{ทุกๆ } j$$

ให้ $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ และ $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ สังเกตว่า U และ V อาจจะมีส่วนที่ทับซ้อน

ดังนั้นเราจะทำการปรับปรุง U และ V ดังนี้

ให้ $U'_i = U_i - \bigcup_{k=1}^i \bar{V}_k$ และ $V'_j = V_j - \bigcup_{k=1}^j \bar{U}_k$ จะได้ว่า U'_i และ V'_j เป็นเซตเปิดสำหรับ

ทุกๆ i และ j และถ้าเราให้ $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U'_i$ และ $V = \bigcup_{j=1}^{\infty} V'_j$ จะแสดงได้ไม่ยากว่า $A \subseteq U$

และ $B \subseteq V$

สมมติให้มี $x \in U \cap V$ ดังนั้นจะมี i_0, j_0 ที่ซึ่ง $x \in U'_{i_0} = U_{i_0} - \bigcup_{k=1}^{i_0} \bar{V}_k$ และ

$$z \in V'_{j_0} = V_{j_0} - \bigcup_{k=1}^{j_0} \overline{U_k}$$

โดยไม่เสียไร้วไป สมมติให้ $i_0 \leq j_0$ ดังนั้น $z \in U_{i_0}$ แต่ $z \notin \overline{V_{i_0}}$ และ $z \in V_{j_0}$ แต่ $z \notin \overline{U_{i_0}}$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้น $U \cap V = \emptyset$
 นั่นคือ X เป็นปริภูมิ T_4 □

ทฤษฎีบทที่ 5.16 ให้ X เป็นปริภูมิ T_i โดยที่ $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1. ถ้า $i \geq j$ แล้ว X จะเป็นปริภูมิ T_j ด้วย
2. สำหรับ $i = 0, 1, 2, 3$ จะได้ว่าทุกเซตย่อยของ X จะเป็นปริภูมิ T_i
3. สำหรับ $i = 4$ จะได้ว่าทุกเซตย่อยปิดของ X จะเป็นปริภูมิ T_i

บทพิสูจน์ ข้อ 1-2 เห็นได้ชัดจากนิยาม

ให้ X เป็นปริภูมิ T_4 และ ให้ Y เป็นปริภูมิย่อยของ X ที่ปิด

ให้ A เป็นเซตเปิดใดๆของ Y และ U_Y เป็นเซตเปิดใน Y ที่คลุม A

ดังนั้น $U_Y = U_X \cap Y$ สำหรับบางเซตเปิด U_X ใน X

เนื่องจาก Y เป็นเซตปิด จะได้ ว่า A เป็นเซตปิดใน X

โดยทฤษฎีบทที่ 5.12 จะได้ว่ามีเซตเปิด V_X ใน X ที่ซึ่ง $A \subseteq V_X \subseteq \overline{V_X} \subseteq U_X$

ดังนั้น จะได้ว่า $A = A \cap Y \subseteq V_Y = V_X \cap Y \subseteq \overline{V_Y} = \overline{V_X} \cap Y \subseteq U_X \cap Y = U_Y$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบทที่ 5.12 เราจะได้ว่า Y เป็นปริภูมิ T_4 □

ทฤษฎีบทที่ 5.17 ให้ X เป็นปริภูมิ T_2 และ $A \subseteq X$ ที่กระชับ ให้ $x \in X - A$ แล้วจะมีเซตเปิด U และ V ที่คลุม A และ x ตามลำดับ ที่ซึ่ง $U \cap V = \emptyset$

บทพิสูจน์ สังเกตว่าแต่ละ $a \in A$ จะมีเซตเปิด U_a และ V_a ที่คลุม a และ x ตามลำดับที่ซึ่ง

$$U_a \cap V_a = \emptyset$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $\{U_a \mid a \in A\}$ เป็นเซตปกเปิดของ A และเนื่องจาก A เป็นเซตกระชับจะได้

ว่า มี $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ ที่ซึ่ง $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$

เราให้ $U = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$ และ $V = \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$ ดังนั้นเห็นได้ชัดว่า U และ V คลุม A และ x

ตามลำดับ และ $U \cap V = \emptyset$ □

ทฤษฎีบทที่ 5.18 ทุกๆเซตย่อยที่กระชับของปริภูมิ T_2 จะเป็นเซตปิด

บทพิสูจน์ ให้ A เป็นเซตย่อยของปริภูมิ T_2 ที่กระชับ X

เราต้องการพิสูจน์ว่า A เป็นเซตปิด หรือ $X - A$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in X - A$ ดังนั้น $x \notin A$ โดยทฤษฎีบทที่ 5.17 จะได้ว่ามีเซตเปิด U และ V ที่คลุม x และ A ตามลำดับ ที่ซึ่ง $U \cap V = \emptyset$

เพราะฉะนั้นเราได้ว่า $x \in U \subseteq X - V \subseteq X - A$

ดังนั้น $X - A$ เป็นเซตเปิด หรือ A เป็นเซตปิด □

ทฤษฎีบทที่ 5.19 ปริภูมิ T_2 ที่กระชับ จะเป็นปริภูมิ T_4

บทพิสูจน์ ให้ A และ B เป็นเซตปิดใน ปริภูมิ T_2 ที่กระชับ X ซึ่ง $A \cap B = \emptyset$

โดยทฤษฎีบทที่ 4.13 จะได้ว่า A และ B เป็นเซตกระชับ และ โดยทฤษฎีบทที่ 5.17 จะได้ว่า สำหรับแต่ละ $a \in A$ จะมีเซตเปิด U_a และ V_a ที่คลุม a และ B ตามลำดับที่ซึ่ง

$$U_a \cap V_a = \emptyset$$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $\{U_a \mid a \in A\}$ เป็นเซตปกเปิดของ A และเนื่องจาก A เป็นเซตกระชับจะได้

$$\text{ว่า มี } a_1, a_2, \dots, a_n \in A \text{ ที่ซึ่ง } A \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{a_i}$$

$$\text{เราให้ } U = \bigcup_{i=1}^n U_{a_i} \text{ และ } V = \bigcap_{i=1}^n V_{a_i}$$

ดังนั้นเห็นได้ชัดว่า U และ V คลุม A และ B ตามลำดับ และ $U \cap V = \emptyset$ □

ทฤษฎีบทที่ 5.20 ให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่สอดคล้อง 1-1 สมมติให้ X เป็นเซตกระชับ และ Y เป็นปริภูมิ T_2 แล้วจะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันสมานสัณฐาน

บทพิสูจน์ เราเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่าทุกๆเซตปิด A ใน X จะต้องได้ว่า $f(A)$ เป็นเซตปิดใน Y

ให้ A เป็นเซตปิดใดๆใน X เนื่องจาก X เป็นเซตกระชับเราจะได้ว่า A เป็นเซตกระชับด้วย

และจากการที่ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเราจะได้ว่า $f(A)$ เป็นเซตกระชับใน Y

โดยทฤษฎีบทที่ 5.18 เราจะได้ว่า $f(A)$ เป็นเซตปิดใน Y □

แบบฝึกหัดประจำบทที่ 5

1. ถ้า X เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 2 และให้ A เป็นเซตย่อยที่นับไม่ได้ (uncountable subset) ของ X แล้วจงแสดงว่า มีจุดจำนวนนับไม่ได้ใน A เป็นจุดลิมิตของ A
2. จงแสดงว่าปริภูมิกระชับ X ที่มีการวัดระยะทาง เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 2
3. ให้ $f : X \rightarrow Y$ เป็นการส่งที่ต่อเนื่องที่มีสมบัติว่า $f(U)$ เป็นเซตเปิดใน Y สำหรับทุกๆเซตเปิด U ใน X
 จงแสดงว่าถ้า X เป็นปริภูมินับได้รูปแบบที่ 1 แล้ว $f(X)$ เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 1 ด้วย
 ในทำนองเดียวกัน ถ้า X เป็นปริภูมินับได้รูปแบบที่ 2 แล้ว $f(X)$ เป็นปริภูมินับได้แบบที่ 2
4. ให้ X เป็นปริภูมิแยกกันได้ จงแสดงว่าทุกๆกลุ่มของเซตเปิดย่อยที่ไม่มีส่วนร่วมเกี่ยวกันของ X มีจำนวนนับได้
5. จงแสดงว่า X เป็นปริภูมิ T_0 ก็ต่อเมื่อ $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ สำหรับทุกๆจุด $x, y \in X$ ที่แตกต่างกัน
6. จงแสดงว่าปริภูมิ T_3 ที่เชื่อมโยงที่มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัวจะต้องเป็นเซตนับไม่ได้
7. ให้ $f, g : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สมมติว่า Y เป็นปริภูมิ T_2
 จงแสดงว่า $\{x \mid f(x) = g(x)\}$ เป็นเซตปิดใน X
8. ให้ $p : X \rightarrow Y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทั่วถึง ที่สมบัติว่า $p(C)$ เป็นเซตปิดใน Y สำหรับทุกๆเซตปิด $C \subseteq X$
 เราเรียกฟังก์ชัน p ที่มีสมบัติข้างต้นว่าการส่งแบบปิด (closed map)
 สมมติว่า X เป็นปริภูมิ T_3 จงแสดงว่า Y เป็นปริภูมิ T_3

บทที่ 6 การประยุกต์บนทฤษฎีจุดตรึง (Applications to fixed point theorems)

ทฤษฎีจุดตรึง (Fixed point theory) เป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยการหาหรือการพิสูจน์การมีอยู่ของจุดตรึงสำหรับฟังก์ชันที่ส่งบนเซตตัวเอง กล่าวคือ ให้ $f: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ X เป็นเซตใด จุดตรึงของ f (fixed point of f) ก็คือจุด $x \in X$ ที่ซึ่ง $f(x) = x$ และแทนเซตของจุดตรึงทั้งหมดของ f ด้วย $F(f)$ หรือ $F(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$

ในการศึกษาทฤษฎีจุดตรึงมีปัญหาที่ทำการศึกษาอยู่ 2 ปัญหาใหญ่ๆดังนี้

สำหรับฟังก์ชัน $f: X \rightarrow X$ ใดๆ

(1) เมื่อใดที่ $F(f) \neq \emptyset$ (existence)

(2) ถ้า $F(f) \neq \emptyset$ แล้วเมื่อใดที่ $F(f)$ จะมีสมาชิกแค่เพียงหนึ่งเดียว (uniqueness)

โดยในงานวิจัยส่วนใหญ่มีต้นแบบมาจากทฤษฎีบทจุดตรึงของบานาค (Banach's Fixed Point Theorem) ซึ่งกล่าวว่า สำหรับปริภูมิอิงระยะทางที่บริบูรณ์ (X, d) และฟังก์ชัน $f: X \rightarrow X$ ที่มีสมบัติว่า $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$ สำหรับทุกๆ $x, y \in X$ โดยที่ $\alpha \in [0, 1)$

ฟังก์ชัน f ข้างต้นเรียกว่าการส่งแบบหดตัว (contraction) แล้วจะได้ว่า ฟังก์ชัน f มีจุดตรึงแค่เพียงจุดเดียว

สำหรับงานวิจัยในส่วนที่ผู้เขียนสนใจนั้น เราสนใจสมบัติทางทอพอโลยีของ เซตจุดตรึง $F(f)$ โดยมีงานวิจัยของ ศ.ดร.พิเชษฐ ขาวหาเป็นต้นแบบ ซึ่งมีรายละเอียดดังจะกล่าวต่อไปนี้

ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $f: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เนื่องจากเราต้องการศึกษาสมบัติของ $F(f)$ ดังนั้นตลอดเนื้อหาที่เหลือในบทนี้ของสมมติให้ $F(f) \neq \emptyset$

บทนิยาม 6.1 ให้ (X, d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $f: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นิยามเซตจุดตรึง (fixed point set) และเซตการลู่เข้า (convergence set) ของ f ตามลำดับดังนี้

$$F(f) = \{x \in X \mid f(x) = x\}$$

และ $C(f) = \{x \in X \mid \text{ลำดับ } (f^n(x)) \text{ ลู่เข้า}\}$

โดยที่ $f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ copies}}(x)$

ข้อสังเกต จากบทนิยามข้างต้นเราได้ว่า $F(f) \subseteq C(f)$

เราสังเกตว่า สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง $f: X \rightarrow X$ จะก่อให้เกิดฟังก์ชัน $f^\infty: C(f) \rightarrow F(f)$ ซึ่งนิยามโดย

$$f^\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)$$

เรามีว่า $f^\infty(x) = x$ สำหรับทุกๆ $x \in F(f)$

ถ้า f^∞ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว ฟังก์ชัน f^∞ จะเป็นการส่งหดตัว (retraction) จาก $C(f)$ ลงมายัง $F(f)$ แต่โดยทั่วไปแล้ว ฟังก์ชัน f^∞ ไม่จำเป็นจะต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.1 พิจารณาช่วงปิด $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ นิยาม $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ โดย

$$f(x) = x^2$$

สำหรับ $x \in [0,1]$ จะได้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยที่ $C(f) = [0,1]$ แต่ $F(f) = \{0,1\}$

พร้อมกันนี้ $f^\infty: C(f) \rightarrow F(f)$ นิยามโดย

$$f^\infty(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2^n} = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

ดังนั้น f^∞ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ต่อไปเราพยายามที่จะหาเงื่อนไขที่จะทำให้ฟังก์ชัน f^∞ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

บทนิยาม 6.2 ให้ (X,d) เป็นปริภูมิอิงระยะทางและ $f: X \rightarrow X$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นิยามเซต

$E(f) = \{x \in X \mid \text{ลำดับของฟังก์ชัน } (f^n) \text{ มีความสมมูลต่อเนื่อง (equicontinuous) ที่ } x\}$
นั่นคือ (f^n) มีความสมมูลต่อเนื่อง (equicontinuous) ที่ x ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ที่
ซึ่งสำหรับ y ถ้า $d(x,y) < \delta$ แล้ว $d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

บทนิยาม 6.3 สำหรับฟังก์ชัน $f: X \rightarrow X$ เราจะกล่าวว่า f เป็นการส่งเสมือนไม่ขยายตัว

(virtually nonexpansive) ถ้า $C(f) \subseteq E(f)$

และได้เงื่อนไขสำหรับการที่ f^∞ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 6.1 ถ้า f เป็นการส่งเสมือนไม่ขยายตัว แล้ว f^∞ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

บทพิสูจน์ [1] ทฤษฎีบทที่ 1.4

□

โดยในการที่จะพิจารณาว่า ฟังก์ชันใดจะเป็นการส่งเสมือนไม่ขยายตัวนั้น มีเครื่องมือที่ช่วยตรวจสอบ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 6.2 สำหรับฟังก์ชัน $f: X \rightarrow X$ เรามีว่า

$$C(f) \subseteq E(f) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad F(f) \subseteq E(f)$$

บทพิสูจน์ [1] ทฤษฎีบทที่ 1.8

□

นอกจากนี้เรามีว่า สำหรับ $p \in F(f)$ เราให้ $C_p(f) = (f^\infty)^{-1}(p)$ เราสามารถแสดงได้ว่า

$$C(f) = \bigcup_{p \in F(f)} C_p(f) \quad \text{และ} \quad C_p(f) \cap C_q(f) = \emptyset \quad \text{เมื่อ} \quad p \neq q$$

บทตั้งที่ 6.3 ถ้า $C_p(f)$ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถี ทุกๆ $p \in F(f)$ และ $F(f)$ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถีด้วย แล้วจะได้ว่า $C(f)$ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถี

บทพิสูจน์ [2] บทตั้งที่ 2.8

□

ต่อไปเราจะทำการขยายงานวิจัยข้างต้นไปยังผลคูณจำนวนอนันต์แบบนับได้ของปริภูมิอิงระยะทาง เพื่อศึกษาสมบัติของเซตจุดตรึงและเซตลู่เข้า ดังจะกล่าวต่อไปนี้

ให้ $\{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ เป็นกลุ่มของปริภูมิอิงระยะทาง เรานิยามปริภูมิผลคูณดังนี้

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i = \{f: \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \mid f(i) \in X_i \text{ สำหรับ } i \in \mathbb{N}\}$$

เพื่อความสะดวก เราจะแทนสมาชิก $f \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ ด้วย $f = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ หรือเพียงแค่ (x_i)

ในปริภูมิผลคูณ $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ เรามีวิธีการนิยามการวัดระยะทางเพื่อก่อกำเนิดทอพอโลยีผลคูณ

(product topology) ได้หลายวิธี ตลอดหัวข้อนี้เราจะใช้การวัดระยะทางบน $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ ดังนิยาม

ต่อไปนี้

สำหรับ $x = (x_i), y = (y_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ นิยามการวัดระยะทางให้เป็น

$$D(x, y) = \sup \left\{ \frac{\bar{d}_i(x_i, y_i)}{i} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$$

โดยที่ $\bar{d}_i(x_i, y_i) = \min\{d_i(x_i, y_i), 1\}$ ทุกๆ $i \in \mathbb{N}$

สำหรับแต่ละ $i \in \mathbb{N}$ ให้ $f_i : X_i \rightarrow X_i$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้นจะก่อให้เกิดฟังก์ชันผล

คูณต่อเนื่อง $\wp : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ กำหนดโดย

$$\wp(x) = (f_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$$

สำหรับทุก $x = (x_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$

บทตั้งที่ 6.4 $F(\wp) = \prod_{i \in \mathbb{N}} F(f_i)$

บทพิสูจน์ เห็นได้ชัดจากบทนิยามของเซตจุดตรึง □

บทตั้งที่ 6.5 $C(\wp) = \prod_{i \in \mathbb{N}} C(f_i)$

บทพิสูจน์ ให้ $x = (x_i) \in C(\wp)$ ดังนั้นจะมี $y = (y_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ ที่ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} \wp^n(x) = y$

สำหรับจำนวนนับ $m \in \mathbb{N}$ เราจะแสดงว่า ลำดับ $(f_m^n(x_m))_{n \in \mathbb{N}}$ ลู่เข้า
ให้ $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim_{n \rightarrow \infty} \wp^n(x) = y$ ดังนั้นจะมี $N \in \mathbb{N}$ ซึ่งสำหรับ

$$n \geq N \Rightarrow D(\wp^n(x), y) < \frac{\varepsilon}{m}$$

เพราะฉะนั้นสำหรับ $n \geq N$ เรามีว่า

$$\frac{\bar{d}_m(f_m^n(x_m), y_m)}{m} \leq D(\wp^n(x), y) < \frac{\varepsilon}{m}$$

หรือ $\bar{d}_m(f_m^n(x_m), y_m) < \varepsilon$ เพราะฉะนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} f_m^n(x_m) = y_m$

เนื่องจาก m เป็นจำนวนนับใดๆ ดังนั้น $x = (x_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} C(f_i)$

ในทางกลับกัน ให้ $x = (x_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} C(f_i)$ ดังนั้น $x_i \in C(f_i)$ ทุก $i \in \mathbb{N}$

ดังนั้นมี $x_i^\infty \in X_i$ ที่ซึ่ง $\lim_{n \rightarrow \infty} f_i^n(x_i) = x_i^\infty$ ทุก $i \in \mathbb{N}$

ต่อไปเราจะแสดงว่าลำดับ $(\wp^n(x))$ ลู่เข้า

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยสมบัติของอาร์คิมิดีส จะมีจำนวนนับ M ที่ซึ่ง $\frac{1}{M} < \varepsilon$

สำหรับ $i > M$ เนื่องจาก $x_i \in C(f_i)$ ดังนั้นจะมี $N_i \in \mathbb{N}$ ที่ซึ่ง

$$n \geq N_i \Rightarrow d_i(f_i^n(x_i), x_i^\infty) < \varepsilon$$

ดังนั้น สำหรับ $n \geq N_i$ เรามีว่า $\frac{\overline{d}_i(f_i^n(x_i), x_i^\infty)}{i} \leq \frac{1}{i} < \varepsilon$

ให้ $N = \max\{N_i \mid i = 1, 2, 3, \dots, M\}$ และ $x^\infty = (x_i^\infty)_{i \in \mathbb{N}}$

สำหรับ $n \geq N$ เรามีว่า

$$\begin{aligned} D(\varphi^n(x), x^\infty) &= \sup \left\{ \frac{\overline{d}_i(f_i^n(x_i), x_i^\infty)}{i} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{\overline{d}_1(f_1^n(x_1), x_1^\infty)}{1}, \frac{\overline{d}_2(f_2^n(x_2), x_2^\infty)}{2}, \dots, \frac{\overline{d}_M(f_M^n(x_M), x_M^\infty)}{M}, \frac{1}{M} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{\varepsilon}{1}, \frac{\varepsilon}{2}, \dots, \frac{\varepsilon}{M}, \frac{1}{M} \right\} = \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = x^\infty$ ดังนั้น $x = (x_i) \in C(\varphi)$ □

เนื่องจากเซต $E(\varphi)$ มีความซับซ้อนมากกว่า เซต $F(\varphi)$ และ $C(\varphi)$ ผู้เขียนยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ว่าเซตดังกล่าวสามารถเขียนในรูปผลคูณของแต่ละส่วนประกอบได้ ถึงกระนั้นก็ตาม ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักในบทนี้ เราสามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

ทฤษฎีบทที่ 6.6 ให้ $\{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ เป็นกลุ่มของปริภูมิอิงระยะทาง และ $f_i : X_i \rightarrow X_i$ เป็นการส่ง

เสมือนไม่ขยายตัว แล้วจะได้ว่า การส่งผลคูณ $\varphi : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ กำหนดโดย

$$\varphi(x) = (f_i(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$$

สำหรับทุก $x = (x_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ เป็นการส่งเสมือนไม่ขยายตัว

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 6.2 เพียงพอที่จะแสดงว่า $F(\varphi) \subseteq E(\varphi)$

ให้ $x = (x_i) \in F(\varphi)$ ได้ว่า $f_i(x_i) = x_i$ ทุก $i \in \mathbb{N}$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยสมบัติของอาร์คิมิดีส จะมีจำนวนนับ N ที่ซึ่ง $\frac{1}{N} < \varepsilon$

สำหรับ $i \leq N$ เนื่องจาก f_i เป็นการส่งเสมือนไม่ขยายตัว และ $x_i \in F(f_i)$ ดังนั้น $x_i \in E(f_i)$

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta_i > 0$ ที่ซึ่งสำหรับ $y_i \in X_i$

$$\overline{d}_i(x_i, y_i) < \delta_i \Rightarrow \overline{d}_i(f_i^n(x_i), f_i^n(y_i)) < \varepsilon \text{ ทุกๆ } n \in \mathbb{N}$$

เนื่องจาก $x_i \in F(f_i)$ เราได้ว่า

$$\overline{d_i}(x_i, y_i) < \delta_i \Rightarrow \overline{d_i}(x_i, f_i^n(y_i)) < \varepsilon \text{ ทุกๆ } n \in \mathbb{N}$$

สำหรับ $i > N$ และ $y_i \in X_i$ เรามีว่า $\overline{d_i}(x_i, f_i^n(y_i)) \leq 1$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\overline{d_i}(x_i, f_i^n(y_i))}{i} \leq \frac{1}{i} < \frac{1}{N}$$

$$\text{ให้ } \delta = \min \left\{ \frac{\delta_i}{i} \mid i = 1, 2, 3, \dots, N \right\}$$

แล้ว สำหรับ $y = (y_i) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ ถ้า $D(x, y) < \delta$ แล้ว สำหรับ $i \leq N$

$$\frac{\overline{d_i}(x_i, y_i)}{i} \leq D(x, y) < \delta \leq \frac{\delta_i}{i}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \overline{d_i}(x_i, y_i) < \delta_i$$

ทำให้ได้ว่า สำหรับ $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} D(\varphi^n(x), \varphi^n(y)) &= \sup \left\{ \frac{\overline{d_i}(f_i^n(x_i), f_i^n(y_i))}{i} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\overline{d_i}(x_i, f_i^n(y_i))}{i} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{\overline{d_1}(x_1, f_1^n(y_1))}{1}, \frac{\overline{d_2}(x_2, f_2^n(y_2))}{2}, \dots, \frac{\overline{d_N}(x_N, f_N^n(y_N))}{N}, \frac{1}{N} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{\varepsilon}{1}, \frac{\varepsilon}{2}, \dots, \frac{\varepsilon}{N}, \frac{1}{N} \right\} = \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น $x = (x_i) \in E(\varphi)$ นั่นคือ φ เป็นการส่งเสมือนไม่ขยายตัว □

จากการส่งผลคูณ $\varphi : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ จะก่อกำเนิดให้เกิดการส่ง

$\varphi^\infty : C(\varphi) \rightarrow F(\varphi)$ นิยามโดย $\varphi^\infty((x_i)) = (\lim_{n \rightarrow \infty} f_i^n(x_i))_{i \in \mathbb{N}}$ สำหรับทุก $x = (x_i) \in C(\varphi)$

และสังเกตว่า $\varphi^\infty((x_i)) = (x_i)$ สำหรับทุก $x = (x_i) \in F(\varphi)$

บทแทรกที่ 6.7 ให้ $\{(X_i, d_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ เป็นกลุ่มของปริภูมิอิงระยะทาง และ $f_i : X_i \rightarrow X_i$ เป็นการส่งเสมือนไม่ขยายตัว แล้วจะได้ว่า การส่ง $\varphi^\infty : C(\varphi) \rightarrow F(\varphi)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น จึงเป็นการส่งแบบหดตัว (retraction)

บทพิสูจน์ โดยทฤษฎีบทที่ 6.6 จะได้ว่า $\varphi : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ เป็นการส่งเสมือนไม่ขยายตัว
 ดังนั้น โดย ทฤษฎีบทที่ 6.1 การส่ง $\varphi^\infty : C(\varphi) \rightarrow F(\varphi)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $\square$

ตัวอย่าง 6.2 ให้ $X_i = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ และให้ $f_i : X_i \rightarrow X_i$ นิยามโดย

$$f_i(x_i) = \begin{cases} x_i^2 & , \quad i = 1 \\ x_i & , \quad i \neq 1 \end{cases}$$

สำหรับทุก $x_i \in X_i$ เห็นได้ชัดว่า f_i เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุก $i \in \mathbb{N}$ นอกจากนี้ยังได้ว่า f_i เป็นการส่งเสมือนแบบไม่ขยายตัวทุก $i \in \mathbb{N}$ ยกเว้น $i=1$ ฟังก์ชัน f_i ก่อให้เกิดฟังก์ชัน

$$\varphi : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \text{ และทำให้ได้ว่า } F(f_i) = \begin{cases} \{0, 1\} & , \quad i = 1 \\ [0, 1] & , \quad i \neq 1 \end{cases} \text{ และ } C(f_i) = [0, 1]$$

ทุก $i \in \mathbb{N}$

ดังนั้นโดยบทตั้งที่ 6.3 เรามีว่า

$$\begin{aligned} F(\varphi) &= \prod_{i \in \mathbb{N}} F(f_i) \\ &= \{0, 1\} \times [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] \\ &= \{0\} \times [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] \cup \{1\} \times [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1] \end{aligned}$$

และโดยบทตั้งที่ 6.4 เรามีว่า $C(\varphi) = \prod_{i \in \mathbb{N}} C(f_i) = [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$

สังเกต $F(\varphi)$ ไม่ใช่เซตเชื่อมโยง โดยมีตัวแบ่งแยกคือ $A = \{0\} \times [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ และ

$B = \{1\} \times [0, 1] \times [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ ดังนั้นการส่ง $\varphi^\infty : C(\varphi) \rightarrow F(\varphi)$ ไม่ใช่การส่งที่ต่อเนื่อง

เนื่องจาก $C(\varphi)$ เป็นเซตเชื่อมโยงแต่ $\varphi^\infty(C(\varphi)) = F(\varphi)$ ไม่ใช่เซตเชื่อมโยง

ต่อไปจะเป็นการแสดงความสัมพันธ์ทางทอพอโลยีระหว่างเซต $C(\varphi)$ และ $F(\varphi)$

จากการส่ง $\varphi : \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ เรามีว่า $C(\varphi) = \bigcup_{p \in F(\varphi)} C_p(\varphi)$ โดยที่

$$C_p(\varphi) = \left(\varphi^\infty \right)^{-1} (\{p\})$$

และสำหรับ $p, q \in F(\varphi)$ ที่ซึ่ง $p \neq q$ เรามีว่า $C_p(\varphi) \cap C_q(\varphi) = \emptyset$

ถ้า $p = ((p_i)) \in F(\varphi) = \prod_{i \in \mathbb{N}} F(f_i)$ แล้วเราจะได้ว่า

$$C_p(\varphi) = (\varphi^\infty)^{-1}(\{p\}) = \prod_{i \in \mathbb{N}} (f_i^\infty)^{-1}(p_i) = \prod_{i \in \mathbb{N}} C_{p_i}(f_i)$$

บทแทรกที่ 6.8 สมมติให้ $F(f_i)$ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถึ ทุก $i \in \mathbb{N}$

ถ้า สำหรับ $p \in F(f_i)$ เรามีว่า $C_p(f_i)$ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถึ แล้ว $C(\varphi)$ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถึ

บทพิสูจน์ เนื่องจากผลคูณจำนวนอนันต์แบบนับได้ของเซตเชื่อมโยงเชิงวิถึ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถึ

เพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละ $p = ((p_i)) \in F(\varphi) = \prod_{i \in \mathbb{N}} F(f_i)$ เซต $C_p(\varphi) = \prod_{i \in \mathbb{N}} C_{p_i}(f_i)$ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถึ ดังนั้น เซต $C(\varphi)$ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถึ เพราะว่า เซต $F(\varphi)$ เป็นเซตเชื่อมโยงเชิงวิถึ

□

ดัชนี

- T_0 space, 77
- T_1 space, 77
- T_2 space, 77
- T_3 space, 77
- T_4 space, 77
- T_5 space, 77
- Axiom of choice, 3
- Banach's contraction mapping theorem, 21
- basis for a topology, 27
- boundary point, 15
- bounded, 15
- cartesian product, 1
- Cauchy sequence, 18
- closed ball, 7
- closed set, 13, 32
- closure, 12, 34
- coarser than, 27
- compact, 59, 62
- compact space, 59
- compact subset, 59
- complete metric space, 20
- connected component, 58
- connected space, 50
- connected subset, 50
- continuous, 43
- continuous at, 38
- converge, 16, 75
- convergence set, 87
- convergent sequence, 16, 75
- countable, 1
- cover, 59
- dense, 71
- diameter, 15
- disconnected space, 50
- disconnected subset, 50
- discrete metric, 6
- discrete space, 26
- discrete topology, 26
- disjoint, 1
- distance, 15
- diverge, 16
- divergent sequence, 16
- equivalence class, 3
- equivalence relation, 2
- eucledean metric, 4
- Extreme value theorem, 68
- finer than, 27
- fixed point, 21
- fixed point set, 87
- Hausdorff space, 77
- homeomorphic to, 40
- homeomorphism, 40

- contraction, 21
- identity map, 39
- imbedding, 48
- inclusion, 41
- indiscrete space, 26
- indiscrete topology, 26
- interior, 8, 34
- Intermediate value theorem, 53
- limit, 16
- limit point, 12
- limit point compact, 63
- locally connected, 57
- locally path connected, 57
- lower limit topology, 38
- metric, 4
- metric space, 4
- metrizable space, 71
- neighborhood, 10
- normal space, 77
- open ball, 7
- open cover, 59
- open set, 8, 25
- path, 54
- path connected component, 58
- path connected space, 54
- product space, 30
- product topology, 30
- regular space, 77
- restriction, 41
- retract, 88
- retraction, 93
- seperable space, 71
- separated, 50
- separation, 49
- sequence, 16
- Sequence Lemma, 20, 75
- sequentially compact, 63
- subsequence, 17
- subspace, 31
- subspace topology, 31
- topological space, 25
- topology, 25
- topology generated by, 28
- totally bounded, 66
- Tube Lemma, 61
- uncountable, 1
- union, 1
- upper bound, 1

- กระชับ, 59, 62
 กระชับจุดลิมิต, 63
 กระชับโดยลำดับ, 63
 การจำกัด, 41
 การเป็นเซตย่อย, 41
 การวัดระยะทางของยูคลิด, 4
 การวัดระยะทางวิยุต, 6
 การวัดระยะทาง, 4
 การส่งเชิงหดตัว, 93
 การส่งเอกลักษณะ, 39
 การหด, 88

 ขอบเขตบน, 1

 ความสัมพันธ์เทียบเท่า, 2

 จุดขอบ, 15
 จุดตรึง, 21
 จุดลิมิต, 12

 ชั้นเทียบเท่า, 3
 เชื่อมโยงเฉพาะที่, 57
 เชื่อมโยงเฉพาะที่เชิงวิถี, 57

 เซตกระชับย่อย, 59
 เซตจุดตรึง, 87
 เซตปก, 59
 เซตปกเปิด, 59
 เซตปิด, 13, 32

 เซตเปิด, 8, 25
 เซตย่อยเชื่อมโยง, 50
 เซตย่อยไม่เชื่อมโยง, 50
 เซตลู่เข้า, 87

 ฐานหลักสำหรับทอพอโลยี, 27

 ต่อเนื่อง, 43
 ต่อเนื่องที่, 38

 ทฤษฎีการส่งแบบหดตัวของบานาค, 21
 ทฤษฎีบทค่ากลาง, 53
 ทฤษฎีบทค่าสุดขีด, 68
 ทอพอโลยี, 25
 ทอพอโลยีก่อกำเนิดโดย, 28
 ทอพอโลยีขอบเขตล่าง, 38
 ทอพอโลยีผลคูณ, 30
 ทอพอโลยีย่อย, 31
 ทอพอโลยีวิยุต, 26
 ทอพอโลยีอวิยุต, 26

 นับได้, 1
 นับไม่ได้, 1

 บทตั้งทอ, 61
 บทตั้งลำดับ, 20, 75
 บอลปิด, 7
 บอลเปิด, 7
 แบ่งแยกจากกัน, 50

ปริภูมิเฮาส์ดอร์ฟ, 77	มีขอบเขต, 15
ปริภูมิ T_0 , 77	มีขอบเขตทุกส่วน, 66
ปริภูมิ T_1 , 77	ไม่มีส่วนร่วม, 1
ปริภูมิ T_2 , 77	
ปริภูมิ T_3 , 77	ย่านจุด, 10
ปริภูมิ T_4 , 77	ยูเนียน, 1
ปริภูมิ T_5 , 77	
ปริภูมิกระชับ, 59	ระยะทาง, 15
ปริภูมิเชื่อมโยง, 50	
ปริภูมิเชื่อมโยงเชิงวิถี, 54	ละเอียดกว่า, 27
ปริภูมิทอพอโลยี, 25	ลำดับ, 16
ปริภูมิปรกติ, 77	ลำดับโคซี, 18
ปริภูมิผลคูณ, 30	ลำดับย่อย, 17
ปริภูมิมีระยะทาง, 71	ลำดับลู่ออก, 16, 75
ปริภูมิไม่เชื่อมโยง, 50	ลำดับลู่ออก, 16
ปริภูมิย่อย, 31	ลิมิต, 16
ปริภูมิแยกกันได้, 71	ลู่ออก, 16, 75
ปริภูมิวิยุต, 26	ลู่ออก, 16
ปริภูมิสม่ำเสมอ, 77	
ปริภูมิอวิยุต, 26	วิถี, 54
ปริภูมิอิงระยะทาง, 4	
ปริภูมิอิงระยะทางบริบูรณ์, 20	สัจพจน์การเลือก, 3
	สมานสัจฐานกับ, 40
ผลคูณคาร์ทีเซียน, 1	ส่วนประกอบเชื่อมโยง, 58
	ส่วนประกอบเชื่อมโยงเชิงวิถี, 58
ฝังใน, 48	ส่วนปิดคลุม, 12, 34
	ส่วนภายใน, 8, 34
ฟังก์ชันสมานสัจฐาน, 40	เส้นผ่านกลาง, 15
มีขอบเขต, 15	

หด, 88

หนาแน่น, 71

หยาบกว่า, 27

บรรณานุกรม

1. Chaoha, P. *Virtually nonexpansive maps and their convergence sets*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 326, pp.390-397, 2007.
2. Chaoha, P. and Atiponrat, W. *Virtually stable maps and their fixed points*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 359, pp.536-542, 2009.
3. Dugundji, J. Topology, Allyn and Bacon, Inc, 1965.
4. Munkres, J.R. Topology, 2nd edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.
5. Pomdee, K. , Sunyeekhan, G. and Hirunmasuwan, P. *The product of virtually nonexpansive maps and their fixed points*. Journal of Physics : Conference series 1132 : 012025, 2018.